Anwendung
programmierbarer Taschenrechner 5

Jürgen Kahmann

Numerische Mathematik

Programme für den TI 59

Vieweg

Ebene 3	0	0	0	0	0	0	0	10–(	0	0
Ebene 2	0	0	0	0	0	10–(	10–(	2×(	0	0
Ebene 1	0	0	0	10–(	10–(	2×(	2×(	3+(	0	0
Y-Register	0	10–(	10–(	2×(	2×(	3+(	3+(	8÷(	8÷(	0
X-Register	10	10	2	2	3	3	8	8	4	6
Eingabe	10	–	2	×	3	+	8	÷	4	=

Jürgen Kahmann

Numerische Mathematik

Programme für den TI 59

Dieses Buch stimmt in der Gliederung des Stoffes
und in der Bezeichnungsweise überein mit dem uni-text

Wolfgang Böhm und Günther Gose
Einführung in die Methoden der Numerischen Mathematik
1977. VIII, 152 Seiten

„In dem Buch werden die Grundideen numerischer Lösungsmethoden dargestellt. Es ist für Studenten der Mathematik und der Informatik und für Interessenten naturwissenschaftlicher Disziplinen geschrieben.

Nach einer Einführung von Grundbegriffen (Algorithmen, Matrizen) werden im zweiten Teil numerische Fragen der linearen Algebra behandelt, darunter der Gaußsche Algorithmus mit Pivotsuche, der konzentrierte Gauß-Algorithmus, die Methode von Cholesky zur Erhaltung der Symmetrie, die Relaxationsmethode, die angenäherte Lösung über- oder unterbestimmter linearer Gleichungssysteme und das Simplexverfahren der linearen Optimierung. Iterative Verfahren wie die klassische Vektoriteration, der Rutishauser-Algorithmus, Methoden zur Konvergenzbeschleunigung und Nullstellenbestimmung bilden den dritten Teil. Es folgen die Interpolation durch Polynome und Splinefunktionen.

Im abschließenden fünften Teil werden die numerische Differentiation und Integration einschließlich Fehlerabschätzungen, die Grenzwertbestimmung durch Extrapolation sowie Ein- und einfache Mehrschrittverfahren mit Schrittweitensteuerung zur Lösung von Differentialgleichungen behandelt, dabei wird auf das Runge-Kutta-Verfahren besonders eingegangen und ein Vergleich der Vorteile von Ein- und Mehrschrittverfahren durchgeführt.

Die Darstellung strebt mehr nach Klarheit der Grundideen als nach Vollständigkeit oder weitestgehender Allgemeinheit. Die einzelnen Verfahren werden durch Algorithmen ergänzt, die die Formulierung in der Programmiersprache ALGOL vorbereiten. Das ausgezeichnete Lehrbuch ist besonders auch zum Selbststudium geeignet."

ZAMM November 1979

Anwendung programmierbarer Taschenrechner

Band 5

Jürgen Kahmann

Numerische Mathematik

Programme für den TI 59

Friedr. Vieweg & Sohn Braunschweig/Wiesbaden

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Kahmann, Jürgen:
Numerische Mathematik: Programme für d. TI 59 /
Jürgen Kahmann. – Braunschweig, Wiesbaden:
Vieweg, 1980.
(Anwendung programmierbarer Taschenrechner;
Bd. 5)
ISBN 3-528-04171-4

Satz: Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig
Druck: E. Hunold, Braunschweig
Buchbinder: W. Langelüddecke, Braunschweig
Printed in Germany

ISBN 3-528-04171-4

Vorwort

In den letzten Jahren war in der Herstellung immer leistungsfähigerer programmierbarer Taschenrechner eine rasante Entwicklung zu beobachten. Um ihre Möglichkeiten und Kapazitäten optimal auszuschöpfen, sollten auch für diese Kleinrechner Programmbibliotheken zur Verfügung stehen.

Der vorliegende Band enthält eine Sammlung nützlicher Programme der numerischen Mathematik für den programmierbaren Taschenrechner TEXAS INSTRUMENTS TI 59. Zugrundegelegt wurde das im gleichen Verlag erschienene Buch

„Einführung in die Methoden der Numerischen Mathematik"

von Wolfgang Böhm und Günther Gose (Vieweg, Braunschweig 1977), aus dem Gliederung und Bezeichnungsweise übernommen wurden, um die Anwendung und das Arbeiten mit den Programmen zu erleichtern. Hier findet der interessierte Leser neben der theoretischen Herleitung auch die flußdiagrammähnlichen Algorithmen, nach denen die Programme erstellt wurden.

Einen kurzen Überblick über die Handhabung des Rechners liefert das Kapitel 0 „Einführung". Dem im Umgang mit dem TI 59 ungeübten Leser sei zunächst ein intensives Studium der zum Rechner gehörenden Bedienungsanleitung „Individuelles Programmieren", insbesondere der Abschnitte I, II und VII empfohlen.

Mein ganz besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Wolfgang Böhm, dessen Vorlesungen ich die Freude an der numerischen Mathematik verdanke. Ohne seine Anregungen und aufmunternden Ratschläge wäre dieses Buch nicht entstanden.

Nicht zuletzt danke ich der Firma TEXAS INSTRUMENTS für die freundliche Unterstützung und dem Vieweg Verlag für die problemlose Zusammenarbeit.

Jürgen Kahmann

Wolfenbüttel, im Frühjahr 1980

Inhaltsverzeichnis

0 Einführung

Dieses Buch enthält 44 Programme der numerischen Mathematik für den programmierbaren Taschenrechner TEXAS INSTRUMENTS TI 59. Die ausführlichen Programmbeschreibungen umfassen jeweils

- eine kurze Erläuterung des programmierten Verfahrens
- eine Tabelle der bei der Benutzung des Programms durchzuführenden Tastenfolgen
- eine Übersicht über die Registerinhalte
- ein vom TI 59 durchgerechnetes Beispiel und
- einen vollständigen Programmausdruck (sowie bei den Programmen 4.3 und 4.4 eine Liste der einzugebenden Konstanten).

Bei den Programmbeschreibungen wurde davon ausgegangen, daß die Programme auf Magnetkarten gespeichert sind.

Die Programmlisten haben folgende Form:

```
000  43   RCL
001  01    01
002  42   STO
003  02    02
      .
      .
      .
```

Dabei bedeuten die ersten drei Ziffern die Nummer der Programmspeicherstelle, die beiden Ziffern in der Mitte den Tastencode, rechts steht das Tastensymbol.

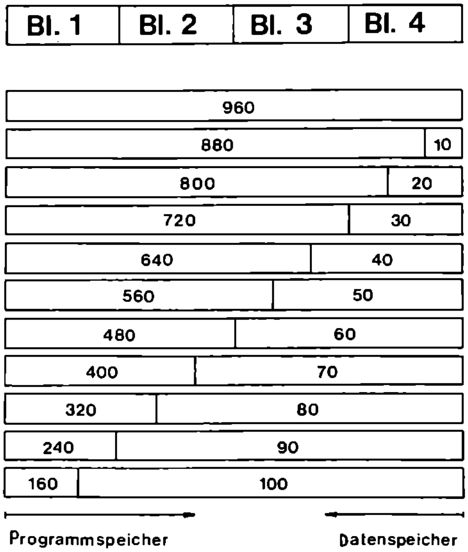
0.1 Der Rechner TI 59

Der TI 59 ist ein programmierbarer Taschenrechner, der in drei Operationsarten betrieben werden kann:

- Verwendung des Moduls
- Durchführung von selbst eingegebenen Programmen
- Benutzung als über die Tastatur zu bedienender Rechner

Wichtig für den Leser ist die zweitgenannte Betriebsart.

Folgende Zeichnung zeigt die Speicherkapazität und -verteilung des Rechners



Wird der Rechner eingeschaltet, stehen 60 Datenspeicher und 480 Programmspeicherstellen zur Verfügung. Mittels der Tastenfolge n 2nd Op 17 läßt sich die Speicherbereichsverteilung – etwa bei Programmen mit hohem Datenspeicherbedarf – auf 10 · n Datenspeicher ändern. Die zugehörige Anzahl von Programmspeicherstellen entnehme man jeweils der Skizze. Bei den einzelnen Programmen ist angegeben, ob und in welcher Weise die Speicherbereichsverteilung geändert werden kann oder muß.

0.2 Eingabe von Programmen

Vor Eingabe eines Programmes empfiehlt es sich stets, den Rechner kurz auszuschalten, um sicherzustellen, daß alle Register gelöscht sind. Will man ein Programm in den TI 59 eingeben, geht man wie folgt vor:

1. Einschalten des Rechners
2. Taste LRN drücken. Es erscheint die Anzeige 000 00.
3. Eingabe der in den Programmlisten abgedruckten Programmbefehle
4. Taste LRN drücken

Jetzt hat der Rechner das Programm gespeichert.

0.3 Magnetkarten

In den Programmbeschreibungen wurde davon ausgegangen, daß die Programme von Magnetkarten in den Rechner eingelesen werden. Aus diesem Grunde und aus Bequemlichkeit ist es sinnvoll, ein in den Rechner eingetastetes Programm auf eine Magnetkarte zu übertragen. Eine Magnetkarte kann den Inhalt zweier Blöcke speichern; die Nummer der gespeicherten Blöcke sollte man beim Beschriften der Karte in den dafür vorgesehenen Kästchen links bzw. rechts oben auf der Karte vermerken. Das Beschreiben der Magnetkarte mit Block m durch den Rechner geschieht folgendermaßen:

1. Tasten m 2nd Write drücken
2. Magnetkarte einschieben
3. In der Anzeige erscheint die Nummer des Blocks m

Block m ist jetzt auf die Magnetkarte übertragen und wird mit jedem Einlesen im Rechner wieder abgespeichert. Das Einlesen einer Magnetkarte geschieht so:

1. Anzeige auf 0 stellen
2. Magnetkarte einschieben
3. In der Anzeige erscheint die Nummer des eben eingelesenen Blocks

Zu beachten ist, daß Magnetkarten nur dann eingelesen werden können, wenn die Speicherbereichsverteilung dieselbe ist wie beim Beschreiben der Magnetkarte.

1 Matrizen

1.1 Produktsumme

Das Programm bestimmt die Produktsumme $s = \mathbf{a}^T\mathbf{b}$ zweier n-Spalten **a** und **b**.

Programminstruktionen

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
1	Einlesen der Magnetkarte (Block 1)			
2	Programmbeginn		A	
3	Eingabe der Nummer des ersten zu belegenden Speicherplatzes $k \geq 4$	? k	R/S	1
4	Eingabe von $a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_n$	a_1	R/S	2
	Dabei bedeutet die Anzeige i, daß bisher i–1 Daten eingegeben wurden	a_2	R/S	3
		⋮	⋮	⋮
		a_n	R/S	n+1
		b_1	R/S	n+2
		⋮	⋮	⋮
		b_n	R/S	2n+1
5	Ende der Koeffizienteneingabe		B	2n+1
6	Eingabe von k und n	?? k	R/S	k
		n	R/S	
7	Ergebnisanzeige			s

Beispiel

Man berechne $s = \mathbf{a}^T\mathbf{b}$ mit $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 3.1 \\ 2.7 \\ 1.5 \end{bmatrix}$ und $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4.2 \\ 0.8 \\ 2.3 \end{bmatrix}$.

Anmerkungen		Eingabe	Taste	Anzeige
Magnetkarte einlesen (Block 1)				1
Programmbeginn			A	1
Eingabe von:	k	4	R/S	1
	a_1	3.1	R/S	2
	a_2	2.7	R/S	3
	a_3	1.5	R/S	4
	b_1	4.2	R/S	5
	b_2	0.8	R/S	6
	b_3	2.3	R/S	7
Ende der Koeffizienteneingabe			B	7
Eingabe von:	k	4	R/S	4
	n	3	R/S	
Anzeige von:	s			18.63

Programm 1.1	Produktsumme (Skalarprodukt)

```
000  76 LBL   LBl
001  11  A    A
002  91 R/S   STO
003  42 STO   00
004  00  00   R/S
005  01  1
006  42 STO
007  02  02
008  43 RCL
009  02  02
010  91 R/S
011  72 ST*
012  00  00
013  01  1
014  44 SUM
015  00  00
016  44 SUM
017  02  02
018  61 GTO  } direkte
019  00  00  } Adresse
020  08  08  }
021  76 LBL
022  12  B
023  91 R/S
024  42 STO
025  00  00   2k
026  91 R/S
027  42 STO
028  01  01   n
029  85  +
030  43 RCL
031  00  00
032  95  =
033  42 STO   n+k
034  02  02
035  00  0
036  42 STO
037  03  03
038  76 LBL
039  13  C
040  73 RC*
041  00  00
042  65  ×
043  73 RC*
044  02  02
045  95  =
046  44 SUM
047  03  03
048  01  1
049  44 SUM
050  00  00
051  44 SUM
052  02  02
053  97 DSZ
054  01  01
055  13  C
056  43 RCL
057  03  03
058  91 R/S
```

1.2 Matrizenprodukt

Das Programm berechnet das Produkt C einer n,l-Matrix $A = [a_{ij}]$ mit einer l,m-Matrix $B = [b_{jk}]$. $C = [c_{ik}]$ ist eine n,m-Matrix mit

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{l} a_{ij} \cdot b_{jk}$$

Programminstruktionen

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
1	Einlesen der Magnetkarte (Block 1)			1
2	Programmbeginn		A	1
3	Eingabe der Nummer des ersten zu belegenden Speicherplatzes $k \geq 10$	k	R/S	1
4	Eingabe der Koeffizienten zunächst von A spaltenweise, dann von B spaltenweise	a_{11}	R/S	2
		a_{21}	R/S	3
		⋮	⋮	⋮
		a_{nl}	R/S	nl+1
		b_{11}	R/S	nl+2
		⋮	⋮	⋮
		b_{lm}	R/S	nl+lm+1
5	Ende der Koeffizienteneingabe		B	0
6	Eingabe von k, n, l, m	k	R/S	k
		n	R/S	n
		l	R/S	l
		m	R/S	
7	Ergebnisanzeige			c_{11}
			R/S	c_{21}
			⋮	⋮
			R/S	c_{nm}

Registerinhalte

$R_{00}, \ldots, R_{09}$: Programmzeiger
$R_k, \ldots, R_{k+nl-1}$: $a_{11}, \ldots, a_{nl}$
$R_{k+nl}, \ldots, R_{k+l(n+m)-1}$: $b_{11}, \ldots, b_{lm}$
$R_{k+l(n+m)}, \ldots, R_{k+l(n+m)+nm-1}$: $c_{11}, \ldots, c_{nm}$

Beispiel

Man berechne $C = A \cdot B$ mit $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ und $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 2 & 7 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

Anmerkungen	Eingabe	Taste	Anzeige
Magnetkarte einlesen (Block 1)			1
Programmbeginn		A	1
Eingabe von: k	10	R/S	1
a_{11}	2	R/S	2
a_{21}	1	R/S	3
a_{12}	4	R/S	4
a_{22}	3	R/S	5
a_{13}	3	R/S	6
a_{23}	1	R/S	7
b_{11}	5	R/S	8
b_{21}	2	R/S	9
b_{31}	3	R/S	10
b_{12}	1	R/S	11
b_{22}	7	R/S	12
b_{32}	4	R/S	13
b_{13}	6	R/S	14
b_{23}	1	R/S	15
b_{33}	3	R/S	16
Ende der Koeffizienteneingabe		B	0
Eingabe von: k	10	R/S	10
n	2	R/S	2
l	3	R/S	3
m	3	R/S	
Anzeige von: c_{11}			27
c_{21}		R/S	14
c_{12}		R/S	42
c_{22}		R/S	26
c_{13}		R/S	25
c_{23}		R/S	12

Es ist $C = \begin{bmatrix} 27 & 42 & 25 \\ 14 & 26 & 12 \end{bmatrix}$.

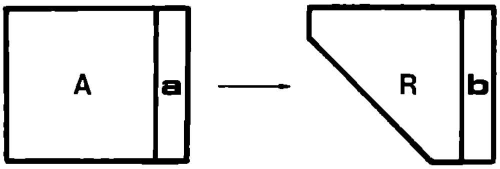
Programm 1.2	Matrizenprodukt

000	76	LBL
001	11	A
002	91	R/S
003	42	STO
004	00	00
005	01	1
006	42	STO
007	01	01
008	43	RCL
009	01	01
010	91	R/S
011	72	ST*
012	00	00
013	01	1
014	44	SUM
015	00	00
016	44	SUM
017	01	01
018	61	GTO
019	00	00
020	08	08
021	76	LBL
022	12	B
023	25	CLR
024	91	R/S
025	42	STO
026	03	03
027	91	R/S
028	42	STO
029	00	00
030	91	R/S
031	42	STO
032	01	01
033	91	R/S
034	42	STO
035	02	02
036	43	RCL
037	03	03
038	85	+
039	43	RCL
040	00	00
041	65	×
042	43	RCL
043	01	01
044	95	=
045	42	STO
046	04	04
047	85	+
048	43	RCL
049	01	01
050	65	×
051	43	RCL
052	02	02
053	95	=
054	42	STO
055	05	05
056	42	STO
057	06	06
058	43	RCL
059	00	00
060	65	×
061	43	RCL
062	02	02
063	95	=
064	42	STO
065	07	07
066	76	LBL
067	13	C
068	00	0
069	72	ST*
070	06	06
071	01	1
072	44	SUM
073	06	06
074	97	DSZ
075	07	07
076	13	C
077	43	RCL
078	02	02
079	42	STO
080	09	09
081	43	RCL
082	05	05
083	42	STO
084	06	06
085	76	LBL
086	16	A'
087	43	RCL
088	00	00
089	42	STO
090	08	08
091	76	LBL
092	17	B'
093	43	RCL
094	01	01
095	42	STO
096	07	07
097	76	LBL
098	18	C'
099	73	RC*
100	03	03
101	65	×
102	73	RC*
103	04	04
104	95	=
105	74	SM*
106	06	06
107	43	RCL
108	00	00
109	44	SUM
110	03	03
111	01	1
112	44	SUM
113	04	04
114	97	DSZ
115	07	07
116	18	C'
117	43	RCL
118	00	00
119	65	×
120	43	RCL
121	01	01
122	75	-
123	01	1
124	95	=
125	22	INV
126	44	SUM
127	03	03
128	43	RCL
129	01	01
130	95	=
131	22	INV
132	44	SUM
133	04	04
134	01	1
135	44	SUM
136	06	06
137	97	DSZ
138	08	08
139	17	B'
140	43	RCL
141	00	00
142	22	INV
143	44	SUM
144	03	03
145	43	RCL
146	01	01
147	44	SUM
148	04	04
149	97	DSZ
150	09	09
151	16	A'
152	43	RCL
153	05	05
154	42	STO
155	06	06
156	43	RCL
157	00	00
158	65	×
159	43	RCL
160	02	02
161	95	=
162	42	STO
163	07	07
164	76	LBL
165	15	E
166	73	RC*
167	06	06
168	91	R/S
169	01	1
170	44	SUM
171	06	06
172	97	DSZ
173	07	07
174	15	E
175	91	R/S

2 Lineare Gleichungen und Ungleichungen

2.1 Der Algorithmus von Gauß

Das Programm berechnet die Lösung eines linearen Gleichungssystems $A\mathbf{x} = \mathbf{a}$ (A reguläre n,n-Matrix, **a** n-Spalte) nach dem Gaußalgorithmus. Dabei wird die Matrix [A, **a**] mittels geeigneter Zeilenumformungen in die Matrix [R, **b**] überführt. Die Lösung des linearen Gleichungssystems $R\mathbf{x} = \mathbf{b}$, die durch Rückwärtseinsetzen gewonnen wird, löst auch das System $A\mathbf{x} = \mathbf{a}$. Das Programm hält, wenn im Verlauf der Rechnung eines der Diagonalelemente r_{jj} von R zu Null wird, und zeigt dies durch eine blinkende Anzeige an. Vor dem Rückwärtseinsetzen gibt das Programm den Wert der Determinante von A aus.



Programminstruktionen

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
1	Magnetkarte einlesen (Block 1, 2)			2
2	Programmbeginn		A	2
3	Eingabe der Nummer des ersten zu belegenden Speicherplatzes $k \geq 11$	k	R/S	1
4	Eingabe der Matrix [A, **a**] spaltenweise	a_{11}	R/S	2
		a_{21}	R/S	3
		⋮	⋮	⋮
		a_{nn}	R/S	n^2+1
		a_1	R/S	n^2+2
		⋮	⋮	⋮
		a_n	R/S	n^2+n+1
5	Ende der Koeffizienteneingabe		B	0
6	Eingabe von k und n	k	R/S	k
		n	R/S	
7	Anzeige von det A			det A

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
8	(falls det $A \neq 0$)		R/S	
9	Ergebnisanzeige			x_1
			R/S	x_2
			⋮	⋮
			R/S	x_n

Registerinhalte

$R_{00}, \ldots, R_{10}$: Programmzeiger
$R_k, \ldots, R_{k+n^2-1}$: $a_{11}, \ldots, a_{nn}$
$R_{k+n^2}, \ldots, R_{k+n(n+1)-1}$: $a_1, \ldots, a_n$

Bemerkungen

1. Das Programm „schreibt" die gesuchte Matrix [R, **b**] über die eingegebene Matrix [A, **a**].
2. Bei gewöhnlicher Speicherbereichsverteilung bearbeitet das Programm Matrizen bis zur Ordnung $n = 6$; bei Änderung der Speicherbereichsverteilung auf 70 Datenspeicher mittels 7 2nd Op 17 auch der Ordnung $n = 7$.

Beispiel

Gesucht ist die Lösung des linearen Gleichungssystems $A\mathbf{x} = \mathbf{a}$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ und } \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Anmerkungen	Eingabe	Taste	Anzeige
Magnetkarte einlesen (Block 1, 2)			2
Programmbeginn		A	2
Eingabe von: k	11	R/S	1
a_{11}	2	R/S	2
a_{21}	2	R/S	3
a_{31}	1	R/S	4
a_{12}	2	R/S	5
a_{22}	1	R/S	6
a_{32}	1	R/S	7
a_{13}	0	R/S	8
a_{23}	1	R/S	9
a_{33}	2	R/S	10
a_1	6	R/S	11
a_2	7	R/S	12
a_3	9	R/S	13

Anmerkungen		Eingabe	Taste	Anzeige
Ende der Koeffizienteneingabe			B	0
Eingabe von:	k	11	R/S	11
	n	3	R/S	
Anzeige von:	det A			−4
			R/S	
Anzeige von:	x_1			1
	x_2		R/S	2
	x_3		R/S	3

Programm 2.1 Der Algorithmus von Gauß

```
000  76  LBL
001  11   A
002  91  R/S
003  42  STO
004  00   00
005  01   1
006  42  STO
007  02   02
008  43  RCL
009  02   02
010  91  R/S
011  72  ST*
012  00   00
013  01   1
014  44  SUM
015  00   00
016  44  SUM
017  02   02
018  61  GTO
019  00   00
020  08   08
021  76  LBL
022  12   B
023  25  CLR
024  91  R/S
025  42  STO
026  01   01
027  91  R/S
028  42  STO
029  00   00
030  43  RCL
031  01   01
032  42  STO
033  02   02
034  42  STO
035  04   04
036  43  RCL
037  02   02
038  85   +
039  01   1
040  95   =
041  42  STO
042  03   03
043  42  STO
044  05   05
045  43  RCL
046  00   00
047  75   -
048  01   1
049  95   =
050  42  STO
051  07   07
052  76  LBL
053  13   C
054  43  RCL
055  07   07
056  42  STO
057  08   08
058  73  RC*
059  02   02
060  67   EQ
061  33  X²
062  76  LBL
063  14   D
064  43  RCL
065  07   07
066  85   +
067  02   2
068  95   =
069  42  STO
070  09   09
071  29  CP
072  73  RC*
073  03   03
074  67   EQ
075  22  INV
076  73  RC*
077  03   03
078  55   ÷
079  73  RC*
080  02   02
081  95   =
082  42  STO
083  10   10
084  76  LBL
085  15   E
086  73  RC*
087  04   04
088  65   ×
089  43  RCL
090  10   10
091  95   =
092  22  INV
093  74  SM*
094  05   05
095  43  RCL
096  00   00
097  44  SUM
098  04   04
099  44  SUM
100  05   05
101  97  DSZ
102  09   09
103  15   E
104  76  LBL
105  22  INV
106  01   1
107  44  SUM
108  03   03
109  53   (
110  43  RCL
111  07   07
112  85   +
113  02   2
114  54   )
115  65   ×
116  43  RCL
117  00   00
118  95   =
119  22  INV
120  44  SUM
121  04   04
122  75   -
123  01   1
124  95   =
125  22  INV
126  44  SUM
127  05   05
128  97  DSZ
129  08   08
130  14   D
131  43  RCL
132  00   00
133  85   +
134  01   1
135  95   =
136  44  SUM
137  02   02
138  43  RCL
139  02   02
140  42  STO
141  04   04
142  85   +
143  01   1
144  95   =
145  42  STO
146  05   05
147  42  STO
148  03   03
149  97  DSZ
150  07   07
151  13   C
152  01   1
153  42  STO
154  06   06
155  43  RCL
```

156	01	01
157	42	STO
158	07	07
159	43	RCL
160	00	00
161	42	STO
162	08	08
163	76	LBL
164	19	D'
165	73	RC*
166	07	07
167	49	PRD
168	06	06
169	43	RCL
170	00	00
171	85	+
172	01	1
173	95	=
174	44	SUM
175	07	07
176	97	DSZ
177	08	08
178	19	D'
179	43	RCL
180	06	06
181	91	R/S
182	43	RCL
183	01	01
184	85	+
185	53	(
186	43	RCL
187	00	00
188	85	+
189	01	1
190	54	)
191	65	×
192	43	RCL
193	00	00
194	75	-
195	01	1
196	95	=
197	42	STO
198	02	02
199	43	RCL
200	01	01
201	85	+
202	53	(
203	43	RCL
204	00	00
205	85	+
206	01	1
207	54	)
208	65	×
209	53	(
210	43	RCL
211	00	00
212	75	-
213	01	1
214	54	)
215	95	=
216	42	STO
217	03	03
218	73	RC*
219	03	03
220	22	INV
221	64	PD*
222	02	02
223	01	1
224	22	INV
225	44	SUM
226	02	02
227	43	RCL
228	00	00
229	85	+
230	01	1
231	95	=
232	22	INV
233	44	SUM
234	03	03
235	43	RCL
236	02	02
237	75	-
238	43	RCL
239	00	00
240	95	=
241	42	STO
242	04	04
243	43	RCL
244	02	02
245	85	+
246	01	1
247	95	=
248	42	STO
249	05	05
250	43	RCL
251	00	00
252	75	-
253	01	1
254	95	=
255	42	STO
256	09	09
257	76	LBL
258	16	A'
259	43	RCL
260	00	00
261	75	-
262	43	RCL
263	09	09
264	95	=
265	42	STO
266	08	08
267	76	LBL
268	17	B'
269	73	RC*
270	04	04
271	65	×
272	73	RC*
273	05	05
274	95	=
275	22	INV
276	74	SM*
277	02	02
278	43	RCL
279	00	00
280	22	INV
281	44	SUM
282	04	04
283	01	1
284	22	INV
285	44	SUM
286	05	05
287	97	DSZ
288	08	08
289	17	B'
290	73	RC*
291	03	03
292	22	INV
293	64	PD*
294	02	02
295	43	RCL
296	00	00
297	85	+
298	01	1
299	95	=
300	22	INV
301	44	SUM
302	03	03
303	01	1
304	22	INV
305	44	SUM
306	02	02
307	43	RCL
308	02	02
309	75	-
310	43	RCL
311	00	00
312	95	=
313	42	STO
314	04	04
315	43	RCL
316	01	01
317	85	+
318	43	RCL
319	00	00
320	65	×
321	53	(
322	43	RCL
323	00	00
324	85	+
325	01	1
326	54	)
327	75	-
328	01	1
329	95	=
330	42	STO
331	05	05
332	97	DSZ
333	09	09
334	16	A'
335	43	RCL
336	00	00
337	42	STO
338	22	22
339	43	RCL
340	00	00
341	33	X^2
342	85	+
343	43	RCL
344	01	01
345	95	=
346	42	STO
347	03	03
348	76	LBL
349	18	C'
350	73	RC*
351	03	03
352	91	R/S
353	01	1
354	44	SUM
355	03	03
356	97	DSZ
357	02	02
358	18	C'
359	91	R/S

2.2 Der Gaußalgorithmus mit Pivotsuche

Das Programm löst auch solche linearen Gleichungssysteme $Ax = a$ (A n,n-Matrix, a n-Spalte), bei denen der gewöhnliche Gaußalgorithmus wegen einer Null in der Hauptdiagonalen der zu erzeugenden Matrix R versagen würde (siehe 2.1 „Der Algorithmus von Gauß"). Beim Gauß-algorithmus mit Pivotsuche wird vor dem Eliminationsschritt j das betragsgrößte Element der „Restspalte" j

$$|a_{rj}| = \max_{i \geqslant j} |a_{ij}|$$

gesucht und anschließend die Zeile r der Matrix [A, a] mit Zeile j vertauscht.

Das Programm berechnet nicht den Wert der Determinante von A. Es bearbeitet Matrizen bis zur Ordnung $n = 6$.

Programminstruktionen

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
1	Magnetkarte einlesen (Block 1, 2)			2
2	Programmbeginn		A	2
3	Eingabe der Nummer des ersten zu belegenden Speicherplatzes $k \geq 15$	k	R/S	1
4	Eingabe der Matrix [A, a] spaltenweise	a_{11}	R/S	2
		a_{21}	R/S	3
		⋮	⋮	⋮
		a_{nn}	R/S	n^2+1
		a_1	R/S	n^2+2
		⋮	⋮	⋮
		a_n	R/S	n^2+n+1
5	Ende der Koeffizienteneingabe		B	0
6	Eingabe von n und k	n	R/S	n
		k	R/S	
7	Ergebnisanzeige			x_1
			R/S	x_2
			⋮	⋮
			R/S	x_n

Registerinhalte

$R_{00}, \ldots, R_{14}$: Programmzeiger

$R_k, \ldots, R_{k+n^2-1}$: $a_{11}, \ldots, a_{nn}$

$R_{k+n^2}, \ldots, R_{k+n^2+n-1}$: $a_1, \ldots, a_n$

Beispiel

Gesucht ist die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = a$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ und } a = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

Anmerkungen		Eingabe	Taste	Anzeige
Magnetkarte einlesen (Block 1, 2)				2
Programmbeginn			A	2
Eingabe von:	k	15	R/S	1
	a_{11}	2	R/S	2
	a_{21}	1	R/S	3
	a_{31}	1	R/S	4
	a_{12}	2	R/S	5
	a_{22}	1	R/S	6
	a_{32}	3	R/S	7
	a_{13}	0	R/S	8
	a_{23}	3	R/S	9
	a_{33}	2	R/S	10
	a_1	8	R/S	11
	a_2	10	R/S	12
	a_3	14	R/S	13
Ende der Koeffizienteneingabe			B	0
Eingabe von:	n	3	R/S	3
	k	15	R/S	
Anzeige von:	x_1			1
	x_2		R/S	3
	x_3		R/S	2

Programm 2.2	Der Gaußalgorithmus mit Pivotsuche

```
000  76  LBL
001  11   A
002  91  R/S
003  42  STO
004  00   00
005  01   1
006  42  STO
007  01   01
008  43  RCL
009  01   01
010  91  R/S
011  72  ST*
012  00   00
013  01   1
014  44  SUM
015  00   00
016  01   1
017  44  SUM
018  01   01
019  61  GTO
020  00   00
021  08   08
022  76  LBL
023  12   B
024  25  CLR
025  91  R/S
026  42  STO
027  00   00
028  91  R/S
029  42  STO
030  01   01
031  42  STO
032  02   02
033  42  STO
034  04   04
035  43  RCL
036  02   02
037  85   +
038  01   1
039  95   =
040  42  STO
041  03   03
042  42  STO
043  05   05
044  43  RCL
045  00   00
046  75   -
047  01   1
048  95   =
049  42  STO
050  07   07
051  76  LBL
```

```
052 13 C
053 00 0
054 42 STO
055 12 12
056 42 STO
057 13 13
058 42 STO
059 14 14
060 32 X:T
061 43 RCL
062 02 02
063 42 STO
064 11 11
065 43 RCL
066 07 07
067 42 STO
068 06 06
069 73 RC*
070 02 02
071 50 I×I
072 32 X:T
073 01 1
074 44 SUM
075 11 11
076 73 RC*
077 11 11
078 50 I×I
079 22 INV
080 77 GE
081 00 00
082 94 94
083 67 EQ
084 00 00
085 94 94
086 32 X:T
087 43 RCL
088 11 11
089 42 STO
090 12 12
091 01 1
092 44 SUM
093 14 14
094 97 DSZ
095 06 06
096 00 00
097 73 73
098 43 RCL
099 14 14
100 32 X:T
101 00 0
102 77 GE
103 01 01
104 48 48
105 43 RCL
106 07 07
107 85 +
108 02 2
109 95 =
110 42 STO
111 06 06
112 76 LBL
113 10 E'
114 73 RC*
115 12 12
116 42 STO
117 13 13
118 73 RC*
119 02 02
120 72 ST*
121 12 12
122 43 RCL
123 13 13
124 72 ST*
125 02 02
126 43 RCL
127 00 00
128 44 SUM
129 02 02
130 44 SUM
131 12 12
132 97 DSZ
133 06 06
134 10 E'
135 53 (
136 43 RCL
137 07 07
138 85 +
139 02 2
140 54 )
141 65 ×
142 43 RCL
143 00 00
144 95 =
145 22 INV
146 44 SUM
147 02 02
148 43 RCL
149 07 07
150 42 STO
151 08 08
152 00 0
153 32 X:T
154 73 RC*
155 02 02
156 67 EQ
157 04 04
158 79 79
159 76 LBL
160 14 D
161 43 RCL
162 07 07
163 85 +
164 02 2
165 95 =
166 42 STO
167 09 09
168 00 0
169 32 X:T
170 73 RC*
171 03 03
172 67 EQ
173 02 02
174 06 06
175 73 RC*
176 03 03
177 55 ÷
178 73 RC*
179 02 02
180 95 =
181 42 STO
182 10 10
183 76 LBL
184 15 E
185 73 RC*
186 04 04
187 65 ×
188 43 RCL
189 10 10
190 95 =
191 22 INV
192 74 SM*
193 05 05.
194 43 RCL
195 00 00
196 44 SUM
197 04 04
198 44 SUM
199 05 05
200 97 DSZ
201 09 09
202 15 E
203 01 1
204 44 SUM
205 03 03
206 53 (
207 43 RCL
208 07 07
209 85 +
210 02 2
211 54 )
212 65 ×
213 43 RCL
214 00 00
215 95 =
216 22 INV
217 44 SUM
218 04 04
219 75 -
220 01 1
221 95 =
222 22 INV
223 44 SUM
224 05 05
225 97 DSZ
226 08 08
227 14 D
228 43 RCL
229 00 00
230 85 +
231 01 1
232 95 =
233 44 SUM
234 02 02
235 43 RCL
236 02 02
237 42 STO
238 04 04
239 85 +
240 01 1
241 95 =
242 42 STO
243 05 05
244 42 STO
245 03 03
246 97 DSZ
247 07 07
248 13 C
249 43 RCL
250 01 01
251 85 +
252 53 (
253 43 RCL
254 00 00
255 85 +
256 01 1
257 54 )
258 65 ×
259 43 RCL
260 00 00
261 75 -
262 01 1
263 95 =
264 42 STO
265 02 02
266 43 RCL
267 01 01
268 85 +
269 53 (
270 43 RCL
271 00 00
272 85 +
273 01 1
274 54 )
275 65 ×
276 53 (
277 43 RCL
278 00 00
279 75 -
280 01 1
281 54 )
282 95 =
283 42 STO
284 03 03
285 73 RC*
286 03 03
287 22 INV
288 64 PD*
289 02 02
290 01 1
291 22 INV
292 44 SUM
293 02 02
294 43 RCL
295 00 00
296 85 +
297 01 1
```

```
298  95  =
299  22  INV
300  44  SUM
301  03  03
302  43  RCL
303  02  02
304  75  -
305  43  RCL
306  00  00
307  95  =
308  42  STO
309  04  04
310  43  RCL
311  02  02
312  85  +
313  01  1
314  95  =
315  42  STO
316  05  05
317  43  RCL
318  00  00
319  75  -
320  01  1
321  95  =
322  42  STO
323  09  09
324  76  LBL
325  16  A'
326  43  RCL
327  00  00
328  75  -
329  43  RCL
330  09  09
331  95  =
332  42  STO
333  08  08
334  76  LBL
335  17  B'
336  73  RC*
337  04  04
338  65  ×
339  73  RC*
340  05  05
341  95  =
342  22  INV
343  74  SM*
344  02  02
345  43  RCL
346  00  00
347  22  INV
348  44  SUM
349  04  04
350  01  1
351  22  INV
352  44  SUM
353  05  05
354  97  DSZ
355  08  08
356  17  B'
357  73  RC*
358  03  03
359  22  INV
360  64  PD*
361  02  02
362  43  RCL
363  00  00
364  85  +
365  01  1
366  95  =
367  22  INV
368  44  SUM
369  03  03
370  01  1
371  22  INV
372  44  SUM
373  02  02
374  43  RCL
375  02  02
376  75  -
377  43  RCL
378  00  00
379  95  =
380  42  STO
381  04  04
382  43  RCL
383  01  01
384  85  +
385  43  RCL
386  00  00
387  65  ×
388  53  (
389  43  RCL
390  00  00
391  85  +
392  01  1
393  54  )
394  75  -
395  01  1
396  95  =
397  42  STO
398  05  05
399  97  DSZ
400  09  09
401  16  A'
402  43  RCL
403  00  00
404  42  STO
405  02  02
406  43  RCL
407  00  00
408  33  X²
409  85  +
410  43  RCL
411  01  01
412  95  =
413  42  STO
414  03  03
415  76  LBL
416  18  C'
417  73  RC*
418  03  03
419  91  R/S
420  01  1
421  44  SUM
422  03  03
423  97  DSZ
424  02  02
425  18  C'
426  91  R/S
427  81  RST
428  00  0
429  00  0
430  00  0
431  00  0
432  00  0
433  00  0
```

2.3 Die LR-Zerlegung

Die LR-Zerlegung ist ein konzentrierter Gaußalgorithmus, der die Matrix A zerlegt in das Produkt zweier Dreiecksmatrizen L und R. Dabei sei A zunächst ohne Zeilenvertauschungen zerlegbar, was i.a. nicht der Fall ist.

Die LR-Zerlegung läßt sich zur Lösung linearer Gleichungssysteme verwenden. Besonders sinnvoll ist ihre Anwendung, wenn mehrere Systeme $Ax = a_1, \ldots, Ax = a_r$ mit identischer Koeffizientenmatrix A vorliegen. Zur Lösung dieser r Systeme wird die LR-Zerlegung einmal bereitgestellt.

Das Programm wurde in zwei Teile zerlegt; dadurch läßt es sich auf Matrizen bis zur Ordnung $n = 6$ anwenden.

Programminstruktionen

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
1	„Teil 1" einlesen (Block 1)			1
2	Programmbeginn „Teil 1"		A	1
3	Eingabe der Nummer des ersten zu belegenden Speicherplatzes $k \geq 11$	k	R/S	1
4	Eingabe der Matrix [A, a] spaltenweise	a_{11}	R/S	2
		a_{21}	R/S	3
		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
		a_{nn}	R/S	n^2+1
		a_1	R/S	n^2+2
		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
		a_n	R/S	n^2+n+1
5	Ende der Koeffizienteneingabe		B	0
6	Eingabe von n und k	n	R/S	0
		k	R/S	
				0
7	„Teil 2" einlesen (Block 1, 2)			2
8	Programmbeginn „Teil 2"		C	
9	Ergebnisanzeige			x_1
			R/S	x_2
			$\vdots$	$\vdots$
			R/S	x_n
10	Eingabe einer neuen „rechten Seite" a'		A'	1
		a'_1	R/S	2
		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
		a'_n	R/S	n+1
11	Ende der Eingabe		C'	
12	Ergebnisanzeige			x'_1
			R/S	x'_2
			$\vdots$	$\vdots$
			R/S	x'_n

Registerinhalte

$R_{00}, \ldots, R_{10}$: Programmzeiger
$R_k, \ldots, R_{k+n^2-1}$: $a_{11}, \ldots, a_{nn}$
$R_{k+n^2}, \ldots, R_{k+n^2+n-1}$: $a_1, \ldots, a_n$

Bemerkungen

1. Ist eine LR-Zerlegung von A nicht möglich, so hält das Programm, und der Rechner zeigt dies durch eine blinkende Anzeige an.
2. Die Schritte 10 bis 12 können beliebig oft wiederholt werden.

Beispiel

Gesucht ist die Lösung der linearen Gleichungssysteme $\mathbf{Ax} = \mathbf{a}$ und $\mathbf{Ax} = \mathbf{a}'$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad a = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}, \qquad a' = \begin{bmatrix} 12 \\ 18 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Anmerkungen	Eingabe	Taste	Anzeige
„Teil 1" einlesen (Block 1)			1
Programmbeginn „Teil 1"		A	1
Eingabe von: k	11	R/S	1
a_{11}	2	R/S	2
a_{21}	2	R/S	3
a_{31}	1	R/S	4
a_{12}	2	R/S	5
a_{22}	1	R/S	6
a_{32}	1	R/S	7
a_{13}	0	R/S	8
a_{23}	1	R/S	9
a_{33}	2	R/S	10
a_1	6	R/S	11
a_2	7	R/S	12
a_3	9	R/S	13
Ende der Koeffizienteneingabe		B	0
Eingabe von: n	3	R/S	0
k	11	R/S	
			0
„Teil 2" einlesen (Block 1, 2)			2
Programmbeginn „Teil 2"		C	
Anzeige von: x_1			1
x_2		R/S	2
x_3		R/S	3
neue „rechte Seite" a'		A'	1
Eingabe von: a'_1	12	R/S	2
a'_2	18	R/S	3
a'_3	14	R/S	4
Ende der Eingabe		C'	
Anzeige von: x'_1			8
x'_2		R/S	–2
x'_3		R/S	4

Programm 2.3	**Die LR-Zerlegung**

Teil 1

```
000  76 LBL
001  11  A
002  91 R/S
003  42 STO
004  02  02
005  01  1
006  42 STO
007  03  03
008  43 RCL
009  03  03
010  91 R/S
011  72 ST*
012  02  02
013  01  1
014  44 SUM
015  03  03
016  44 SUM
017  02  02
018  61 GTO
019  00  00
020  08  08
021  76 LBL
022  12  B
023  25 CLR
024  91 R/S
025  42 STO
026  00  00
027  75  -
028  01  1
029  95  =
030  42 STO
031  04  04
032  25 CLR
033  91 R/S
034  42 STO
035  01  01
036  42 STO
037  02  02
038  85  +
039  01  1
040  95  =
041  42 STO
042  03  03
043  00  0
044  32 X:T
045  73 RC*
046  02  02
047  67  EQ
048  99 PRT
049  76 LBL
050  22 INV
051  73 RC*
052  02  02
053  22 INV
054  64 PD*
055  03  03
056  01  1
057  44 SUM
058  03  03
059  97 DSZ
060  04  04
061  22 INV
062  43 RCL
063  01  01
064  85  +
065  43 RCL
066  00  00
067  85  +
068  01  1
069  95  =
070  42 STO
071  05  05
072  42 STO
073  06  06
074  43 RCL
075  01  01
076  85  +
077  01  1
078  95  =
079  42 STO
080  03  03
081  43 RCL
082  01  01
083  85  +
084  43 RCL
085  00  00
086  95  =
087  42 STO
088  04  04
089  43 RCL
090  00  00
091  75  -
092  01  1
093  95  =
094  42 STO
095  07  07
096  25 CLR
097  91 R/S
```

Teil 2

```
000  76 LBL
001  13  C
002  43 RCL
003  00  00
004  75  -
005  43 RCL
006  07  07
007  95  =
008  42 STO
009  08  08
010  01  1
011  42 STO
012  10  10
013  76 LBL
014  14  D
015  43 RCL
016  10  10
017  42 STO
018  09  09
019  76 LBL
020  23 LNX
021  73 RC*
022  03  03
023  65  ×
024  73 RC*
025  04  04
026  95  =
027  22 INV
028  74 SM*
029  05  05
030  43 RCL
031  00  00
032  44 SUM
033  03  03
034  01  1
035  44 SUM
036  04  04
037  97 DSZ
038  09  09
039  23 LNX
040  43 RCL
041  10  10
042  65  ×
043  43 RCL
044  00  00
045  75  -
046  01  1
047  95  =
048  22 INV
049  44 SUM
050  03  03
051  43 RCL
052  10  10
053  22 INV
054  44 SUM
055  04  04
056  01  1
057  44 SUM
058  05  05
059  44 SUM
060  10  10
061  97 DSZ
062  08  08
063  14  D
064  43 RCL
065  07  07
066  75  -
067  01  1
068  95  =
069  42 STO
070  08  08
071  00  0
072  32 X:T
073  43 RCL
074  08  08
075  67  EQ
076  18  C'
077  76 LBL
078  10  E'
079  43 RCL
080  00  00
081  75  -
082  43 RCL
083  07  07
084  95  =
085  42 STO
086  09  09
087  76 LBL
088  24  CE
089  73 RC*
090  03  03
091  65  ×
092  73 RC*
093  04  04
094  95  =
095  22 INV
096  74 SM*
097  05  05
098  43 RCL
099  00  00
```

```
100 44 SUM
101 03 03
102 01 1
103 44 SUM
104 04 04
105 97 DSZ
106 09 09
107 24 CE
108 73 RC*
109 06 06
110 67 EQ
111 99 PRT
112 73 RC*
113 06 06
114 22 INV
115 64 PD*
116 05 05
117 53 (
118 43 RCL
119 00 00
120 75 -
121 43 RCL
122 07 07
123 54 )
124 65 ×
125 43 RCL
126 00 00
127 75 -
128 01 1
129 95 =
130 22 INV
131 44 SUM
132 03 03
133 43 RCL
134 00 00
135 75 -
136 43 RCL
137 07 07
138 95 =
139 22 INV
140 44 SUM
141 04 04
142 01 1
143 44 SUM
144 05 05
145 97 DSZ
146 08 08
147 10 E'
148 43 RCL
149 05 05
150 42 STO
151 04 04
152 01 1
153 44 SUM
154 05 05
155 43 RCL
156 01 01
157 85 +
158 01 1
159 95 =
160 42 STO
161 03 03
162 43 RCL
163 00 00
164 85 +
165 01 1
166 95 =
167 44 SUM
168 06 06
169 97 DSZ
170 07 07
171 13 C
172 76 LBL
173 18 C'
174 43 RCL
175 01 01
176 85 +
177 43 RCL
178 00 00
179 33 X²
180 95 =
181 42 STO
182 03 03
183 85 +
184 01 1
185 95 =
186 42 STO
187 05 05
188 43 RCL
189 01 01
190 85 +
191 01 1
192 95 =
193 42 STO
194 04 04
195 43 RCL
196 00 00
197 75 -
198 01 1
199 95 =
200 42 STO
201 09 09
202 76 LBL
203 98 ADV
204 43 RCL
205 00 00
206 75 -
207 43 RCL
208 09 09
209 95 =
210 42 STO
211 08 08
212 76 LBL
213 17 B'
214 73 RC*
215 04 04
216 65 ×
217 73 RC*
218 03 03
219 95 =
220 22 INV
221 74 SM*
222 05 05
223 43 RCL
224 00 00
225 44 SUM
226 04 04
227 01 1
228 44 SUM
229 03 03
230 97 DSZ
231 08 08
232 17 B'
233 01 1
234 44 SUM
235 05 05
236 43 RCL
237 01 01
238 85 +
239 43 RCL
240 00 00
241 33 X²
242 95 =
243 42 STO
244 03 03
245 43 RCL
246 01 01
247 85 +
248 43 RCL
249 00 00
250 75 -
251 43 RCL
252 09 09
253 85 +
254 01 1
255 95 =
256 42 STO
257 04 04
258 97 DSZ
259 09 09
260 98 ADV
261 43 RCL
262 01 01
263 85 +
264 53 (
265 43 RCL
266 00 00
267 85 +
268 01 1
269 54 )
270 65 ×
271 43 RCL
272 00 00
273 75 -
274 01 1
275 95 =
276 42 STO
277 02 02
278 43 RCL
279 01 01
280 85 +
281 53 (
282 43 RCL
283 00 00
284 85 +
285 01 1
286 54 )
287 65 ×
288 53 (
289 43 RCL
290 00 00
291 75 -
292 01 1
293 54 )
294 95 =
295 42 STO
296 03 03
297 73 RC*
298 03 03
299 22 INV
300 64 PD*
301 02 02
302 01 1
303 22 INV
304 44 SUM
305 02 02
306 43 RCL
307 00 00
308 85 +
309 01 1
310 95 =
311 22 INV
312 44 SUM
313 03 03
314 43 RCL
315 02 02
316 75 -
317 43 RCL
318 00 00
319 95 =
320 42 STO
321 04 04
322 43 RCL
323 02 02
324 85 +
325 01 1
326 95 =
327 42 STO
328 05 05
329 43 RCL
330 00 00
331 75 -
332 01 1
333 95 =
334 42 STO
335 09 09
336 76 LBL
337 90 LST
338 43 RCL
339 00 00
340 75 -
341 43 RCL
342 09 09
343 95 =
344 42 STO
345 08 08
346 76 LBL
347 89 π
```

```
348  73 RC*
349  04  04
350  65  ×
351  73 RC*
352  05  05
353  95  =
354  22 INV
355  74 SM*
356  02  02
357  43 RCL
358  00  00
359  22 INV
360  44 SUM
361  04  04
362  01  1
363  22 INV
364  44 SUM
365  05  05
366  97 DSZ
367  08  08
368  89  π
369  73 RC*
370  03  03
371  22 INV
372  64 PD*
373  02  02
374  43 RCL
375  00  00
376  85  +
377  01  1
378  95  =
379  22 INV
380  44 SUM
381  03  03
382  01  1
383  22 INV
384  44 SUM
385  02  02
386  43 RCL
387  02  02
388  75  -
389  43 RCL
390  00  00
391  95  =
392  42 STO
393  04  04
394  43 RCL
395  01  01
396  85  +
397  43 RCL
398  00  00
399  65  ×
400  53  (
401  43 RCL
402  00  00
403  85  +
404  01  1
405  54  )
406  75  -
407  01  1
408  95  =
409  42 STO
410  05  05
411  97 DSZ
412  09  09
413  90 LST
414  43 RCL
415  00  00
416  42 STO
417  02  02
418  43 RCL
419  00  00
420  33 X²
421  85  +
422  43 RCL
423  01  01
424  95  =
425  42 STO
426  03  03
427  76 LBL
428  88 DMS
429  73 RC*
430  03  03
431  91 R/S
432  01  1
433  44 SUM
434  03  03
435  97 DSZ
436  02  02
437  88 DMS
438  91 R/S
439  76 LBL
440  16 A'
441  43 RCL
442  01  01
443  85  +
444  43 RCL
445  00  00
446  33 X²
447  95  =
448  42 STO
449  03  03
450  01  1
451  42 STO
452  04  04
453  43 RCL
454  04  04
455  91 R/S
456  72 ST*
457  03  03
458  01  1
459  44 SUM
460  03  03
461  44 SUM
462  04  04
463  61 GTO
464  04  04
465  53  53
```

2.4 Die LR-Zerlegung mit Pivotsuche

Die gewöhnliche LR-Zerlegung versagt, wenn eines der Diagonalelemente von R zu Null wird. Dann hat A keine LR-Zerlegung, wohl aber die Matrix $P \cdot A$, wobei P die Permutationsmatrix der Zeilenvertauschungen ist. Das Programm bestimmt also Dreiecksmatrizen L und R mit $L \cdot R = P \cdot A$. Es wurde in drei Teile zerlegt und gestattet so die Anwendung auf Matrizen bis zur Ordnung $n = 5$. Für die Lösung mehrerer linearer Gleichungssysteme gilt das entsprechende wie beim Programm 2.3 „Die LR-Zerlegung".

Programminstruktionen

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
1	„Teil 1" einlesen (Block 1)			1
2	Programmbeginn „Teil 1"		A	1
3	Eingabe der Nummer des ersten zu belegenden Speicherplatzes $k \geq 14$	k	R/S	1

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
4	Eingabe der Matrix [A, a] spaltenweise	a_{11}	R/S	2
		a_{21}	R/S	3
		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
		a_{nn}	R/S	n^2+1
		a_1	R/S	n^2+2
		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
		a_n	R/S	n^2+n+1
5	Ende der Koeffizienteneingabe		B	n^2+n+1
6	Eingabe von n und k	n	R/S	n
		k	R/S	
				0
7	„Teil 2" einlesen (Block 1, 2)			2
8	Programmbeginn „Teil 2"		C	
				0
9	„Teil 3" einlesen (Block 1, 2)			2
10	Programmbeginn „Teil 3"		D	
11	Ergebnisanzeige			x_1
			R/S	x_2
			$\vdots$	$\vdots$
			R/S	x_n
12	Eingabe einer neuen „rechten Seite" a'		A'	1
		a'_1	R/S	2
		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
		a'_n	R/S	n+1
13	Ende der Koeffizienteneingabe		B'	
14	Ergebnisanzeige			x'_1
			R/S	x'_2
			$\vdots$	$\vdots$
			R/S	x'_n

Registerinhalte

$R_{00}, \ldots, R_{13}$: Programmzeiger

$R_k, \ldots, R_{k+n^2-1}$: $a_{11}, \ldots, a_{nn}$

$R_{k+n^2}, \ldots, R_{k+n^2+n-1}$: $a_1, \ldots, a_n$

$R_{k+n^2+n}, \ldots, R_{k+n^2+2n-1}$: Zeilenindizes

Bemerkungen

1. In den Registern $R_{k+n^2+n}, \ldots, R_{k+n^2+2n-1}$ werden die Zeilenvertauschungen gespeichert.
2. Ist A nicht regulär, so hält das Programm und der Rechner zeigt dies durch eine blinkende Anzeige an.

Beispiel

Gesucht ist die Lösung der linearen Gleichungssysteme $Ax = a$ und $Ax = a'$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad a = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix}, \qquad a' = \begin{bmatrix} 12 \\ 14 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Anmerkungen		Eingabe	Taste	Anzeige
„Teil 1" einlesen (Block 1)				1
Programmbeginn „Teil 1"			A	1
Eingabe von:	k	14	R/S	1
	a_{11}	2	R/S	2
	a_{21}	1	R/S	3
	a_{31}	2	R/S	4
	a_{12}	2	R/S	5
	a_{22}	1	R/S	6
	a_{32}	1	R/S	7
	a_{13}	0	R/S	8
	a_{23}	2	R/S	9
	a_{33}	1	R/S	10
	a_1	6	R/S	11
	a_2	9	R/S	12
	a_3	7	R/S	13
Ende der Koeffizienteneingabe			B	13
Eingabe von:	n	3	R/S	3
	k	14	R/S	
				0
„Teil 2" einlesen (Block 1, 2)				2
Programmbeginn „Teil 2"			C	
				0
„Teil 3" einlesen (Block 1, 2)				2
Programmbeginn „Teil 3"			D	
Anzeige von:	x_1			1
	x_2		R/S	2
	x_3		R/S	3

Anmerkungen	Eingabe	Taste	Anzeige
neue „rechte Seite" a'		A'	1
Eingabe von: a_1'	12	R/S	2
a_2'	14	R/S	3
a_3'	18	R/S	4
Ende der Eingabe		B'	
Anzeige von: x_1'			8
x_2'		R/S	−2
x_3'		R/S	4

Programm 2.4 Die LR-Zerlegung mit Pivotsuche

Teil 1

```
000 76 LBL
001 11 A
002 91 R/S
003 42 STO
004 02 02
005 01 1
006 42 STO
007 03 03
008 43 RCL
009 03 03
010 91 R/S
011 72 ST*
012 02 02
013 01 1
014 44 SUM
015 03 03
016 44 SUM
017 02 02
018 61 GTO
019 00 00
020 08 08
021 76 LBL
022 12 B
023 91 R/S
024 42 STO
025 00 00
026 91 R/S
027 42 STO
028 01 01
029 85 +
030 43 RCL
031 00 00
032 33 X²
033 85 +
034 43 RCL
035 00 00
036 95 =
037 42 STO
038 02 02
039 01 1
040 42 STO
041 03 03
042 43 RCL
043 00 00
044 42 STO
045 04 04
046 76 LBL
047 22 INV
048 43 RCL
049 03 03
050 72 ST*
051 02 02
052 01 1
053 44 SUM
054 02 02
055 44 SUM
056 03 03
057 97 DSZ
058 04 04
059 22 INV
060 43 RCL
061 01 01
062 42 STO
063 02 02
064 42 STO
065 11 11
066 85 +
067 01 1
068 95 =
069 42 STO
070 03 03
071 43 RCL
072 00 00
073 75 -
074 01 1
075 95 =
076 42 STO
077 06 06
078 42 STO
079 07 07
080 00 0
081 42 STO
082 12 12
083 42 STO
084 13 13
085 32 X:T
086 73 RC*
087 02 02
088 50 I×I
089 32 X:T
090 91 R/S
```

Teil 2

```
000 76 LBL
001 13 C
002 01 1
003 44 SUM
004 11 11
005 73 RC*
006 11 11
007 22 INV
008 77 GE
009 24 CE
010 67 EQ
011 24 CE
012 32 X:T
013 43 RCL
014 11 11
015 42 STO
016 12 12
017 01 1
018 44 SUM
019 13 13
020 76 LBL
021 24 CE
022 97 DSZ
023 06 06
024 13 C
025 43 RCL
026 13 13
027 32 X:T
028 00 0
029 77 GE
030 25 CLR
031 43 RCL
032 07 07
033 85 +
034 03 3
035 95 =
036 42 STO
037 06 06
038 76 LBL
039 32 X:T
```

```
040  73  RC*
041  12   12
042  63  EX*
043  02   02
044  63  EX*
045  12   12
046  43  RCL
047  00   00
048  44  SUM
049  02   02
050  44  SUM
051  12   12
052  97  DSZ
053  06   06
054  32  X:T
055  76  LBL
056  25  CLR
057  43  RCL
058  00   00
059  75   -
060  01   1
061  95   =
062  42  STO
063  06   06
064  29  CP
065  73  RC*
066  01   01
067  67   EQ
068  96  WRT
069  76  LBL
070  33  X²
071  73  RC*
072  01   01
073  22  INV
074  64  PD*
075  03   03
076  01   1
077  44  SUM
078  03   03
079  97  DSZ
080  06   06
081  33  X²
082  43  RCL
083  01   01
084  85   +
085  43  RCL
086  00   00
087  85   +
088  01   1
089  95   =
090  42  STO
091  05   05
092  42  STO
093  06   06
094  43  RCL
095  01   01
096  85   +
097  01   1
098  95   =
099  42  STO
100  03   03
101  43  RCL
102  01   01
103  85   +
104  43  RCL
105  00   00
106  95   =
107  42  STO
108  04   04
109  43  RCL
110  00   00
111  75   -
112  01   1
113  95   =
114  42  STO
115  07   07
116  76  LBL
117  18  C'
118  43  RCL
119  00   00
120  75   -
121  43  RCL
122  07   07
123  75   -
124  01   1
125  95   =
126  42  STO
127  08   08
128  01   1
129  42  STO
130  10   10
131  00   0
132  29  CP
133  43  RCL
134  08   08
135  67   EQ
136  34  ΓX
137  76  LBL
138  35  1/X
139  43  RCL
140  10   10
141  42  STO
142  09   09
143  76  LBL
144  42  STO
145  73  RC*
146  03   03
147  65   ×
148  73  RC*
149  04   04
150  95   =
151  22  INV
152  74  SM*
153  05   05
154  43  RCL
155  00   00
156  44  SUM
157  03   03
158  01   1
159  44  SUM
160  04   04
161  97  DSZ
162  09   09
163  42  STO
164  43  RCL
165  10   10
166  65   ×
167  43  RCL
168  00   00
169  75   -
170  01   1
171  95   =
172  22  INV
173  44  SUM
174  03   03
175  43  RCL
176  10   10
177  22  INV
178  44  SUM
179  04   04
180  01   1
181  44  SUM
182  05   05
183  44  SUM
184  10   10
185  97  DSZ
186  08   08
187  35  1/X
188  76  LBL
189  34  ΓX
190  43  RCL
191  07   07
192  42  STO
193  08   08
194  76  LBL
195  43  RCL
196  43  RCL
197  00   00
198  75   -
199  43  RCL
200  07   07
201  95   =
202  42  STO
203  09   09
204  76  LBL
205  44  SUM
206  73  RC*
207  03   03
208  65   ×
209  73  RC*
210  04   04
211  95   =
212  22  INV
213  74  SM*
214  05   05
215  43  RCL
216  00   00
217  44  SUM
218  03   03
219  01   1
220  44  SUM
221  04   04
222  97  DSZ
223  09   09
224  44  SUM
225  53   (
226  43  RCL
227  00   00
228  75   -
229  43  RCL
230  07   07
231  54   )
232  65   ×
233  43  RCL
234  00   00
235  75   -
236  01   1
237  95   =
238  22  INV
239  44  SUM
240  03   03
241  43  RCL
242  00   00
243  75   -
244  43  RCL
245  07   07
246  95   =
247  22  INV
248  44  SUM
249  04   04
250  01   1
251  44  SUM
252  05   05
253  97  DSZ
254  08   08
255  43  RCL
256  29  CP
257  01   1
258  75   -
259  43  RCL
260  07   07
261  95   =
262  67   EQ
263  99  PRT
264  43  RCL
265  01   01
266  85   +
267  53   (
268  43  RCL
269  00   00
270  75   -
271  43  RCL
272  07   07
273  54   )
274  65   ×
275  53   (
276  43  RCL
277  00   00
278  85   +
279  01   1
280  54   )
281  95   =
282  42  STO
283  02   02
284  42  STO
285  11   11
286  00   0
287  42  STO
```

```
288  12  12
289  42  STO
290  13  13
291  32  X:T
292  43  RCL
293  07  07
294  75  -
295  01  1
296  95  =
297  42  STO
298  09  09
299  73  RC*
300  02  02
301  50  I×I
302  32  X:T
303  76  LBL
304  45  Yx
305  01  1
306  44  SUM
307  11  11
308  73  RC*
309  11  11
310  50  I×I
311  22  INV
312  77  GE
313  52  EE
314  67  EQ
315  52  EE
316  32  X:T
317  43  RCL
318  11  11
319  42  STO
320  12  12
321  01  1
322  44  SUM
323  13  13
324  76  LBL
325  52  EE
326  97  DSZ
327  09  09
328  45  Yx
329  43  RCL
330  13  13
331  32  X:T
332  00  0
333  77  GE
334  53  (
335  43  RCL
336  00  00
337  85  +
338  02  2
339  95  =
340  42  STO
341  09  09
342  43  RCL
343  00  00
344  65  ×
345  53  (
346  43  RCL
347  00  00
348  75  -
349  43  RCL
350  07  07
351  54  )
352  95  =
353  22  INV
354  44  SUM
355  12  12
356  22  INV
357  44  SUM
358  02  02
359  76  LBL
360  54  )
361  73  RC*
362  12  12
363  63  EX*
364  02  02
365  63  EX*
366  12  12
367  43  RCL
368  00  00
369  44  SUM
370  02  02
371  44  SUM
372  12  12
373  97  DSZ
374  09  09
375  54  )
376  76  LBL
377  53  (
378  43  RCL
379  01  01
380  85  +
381  53  (
382  43  RCL
383  00  00
384  75  -
385  43  RCL
386  07  07
387  54  )
388  65  ×
389  53  (
390  43  RCL
391  00  00
392  85  +
393  01  1
394  54  )
395  95  =
396  42  STO
397  06  06
398  85  +
399  01  1
400  95  =
401  42  STO
402  05  05
403  43  RCL
404  07  07
405  75  -
406  01  1
407  95  =
408  42  STO
409  09  09
410  76  LBL
411  55  ÷
412  73  RC*
413  06  06
414  22  INV
415  64  PD*
416  05  05
417  01  1
418  44  SUM
419  05  05
420  97  DSZ
421  09  09
422  55  ÷
423  43  RCL
424  01  01
425  85  +
426  01  1
427  95  =
428  42  STO
429  03  03
430  43  RCL
431  01  01
432  85  +
433  43  RCL
434  00  00
435  65  ×
436  53  (
437  43  RCL
438  00  00
439  85  +
440  01  1
441  75  -
442  43  RCL
443  07  07
444  54  )
445  95  =
446  42  STO
447  04  04
448  85  +
449  01  1
450  95  =
451  42  STO
452  05  05
453  43  RCL
454  00  00
455  85  +
456  01  1
457  95  =
458  44  SUM
459  06  06
460  97  DSZ
461  07  07
462  18  C'
463  76  LBL
464  99  PRT
465  91  R/S
```

Teil 3

```
000  76  LBL
001  14  D
002  43  RCL
003  01  01
004  85  +
005  43  RCL
006  00  00
007  33  X²
008  95  =
009  42  STO
010  03  03
011  85  +
012  01  1
013  95  =
014  42  STO
015  05  05
016  43  RCL
017  01  01
018  85  +
019  01  1
020  95  =
021  42  STO
022  04  04
023  43  RCL
024  00  00
025  75  -
026  01  1
027  95  =
028  42  STO
029  09  09
030  76  LBL
031  98  ADV
032  43  RCL
033  00  00
034  75  -
035  43  RCL
036  09  09
037  95  =
038  42  STO
039  08  08
040  76  LBL
041  97  DSZ
```

```
042  73  RC*
043  04   04
044  65   ×
045  73  RC*
046  03   03
047  95   =
048  22  INV
049  74  SM*
050  05   05
051  43  RCL
052  00   00
053  44  SUM
054  04   04
055  01   1
056  44  SUM
057  03   03
058  97  DSZ
059  08   08
060  97  DSZ
061  01   1
062  44  SUM
063  05   05
064  43  RCL
065  01   01
066  85   +
067  43  RCL
068  00   00
069  33  X²
070  95   =
071  42  STO
072  03   03
073  43  RCL
074  01   01
075  85   +
076  43  RCL
077  00   00
078  75   -
079  43  RCL
080  09   09
081  85   +
082  01   1
083  95   =
084  42  STO
085  04   04
086  97  DSZ
087  09   09
088  98  ADV
089  43  RCL
090  01   01
091  85   +
092  53   (
093  43  RCL
094  00   00
095  85   +
096  01   1
097  54   )
098  65   ×
099  43  RCL
100  00   00
101  75   -
102  01   1
103  95   =
104  42  STO
105  02   02
106  43  RCL
107  01   01
108  85   +
109  53   (
110  43  RCL
111  00   00
112  85   +
113  01   1
114  54   )
115  65   ×
116  53   (
117  43  RCL
118  00   00
119  75   -
120  01   1
121  54   )
122  95   =
123  42  STO
124  03   03
125  73  RC*
126  03   03
127  22  INV
128  64  PD*
129  02   02
130  01   1
131  22  INV
132  44  SUM
133  02   02
134  43  RCL
135  00   00
136  85   +
137  01   1
138  95   =
139  22  INV
140  44  SUM
141  03   03
142  43  RCL
143  02   02
144  75   -
145  43  RCL
146  00   00
147  95   =
148  42  STO
149  04   04
150  43  RCL
151  02   02
152  85   +
153  01   1
154  95   =
155  42  STO
156  05   05
157  43  RCL
158  00   00
159  75   -
160  01   1
161  95   =
162  42  STO
163  09   09
164  76  LBL
165  90  LST
166  43  RCL
167  00   00
168  75   -
169  43  RCL
170  09   09
171  95   =
172  42  STO
173  08   08
174  76  LBL
175  89   π
176  73  RC*
177  04   04
178  65   ×
179  73  RC*
180  05   05
181  95   =
182  22  INV
183  74  SM*
184  02   02
185  43  RCL
186  00   00
187  22  INV
188  44  SUM
189  04   04
190  01   1
191  22  INV
192  44  SUM
193  05   05
194  97  DSZ
195  08   08
196  89   π
197  73  RC*
198  03   03
199  22  INV
200  64  PD*
201  02   02
202  43  RCL
203  00   00
204  85   +
205  01   1
206  95   =
207  22  INV
208  44  SUM
209  03   03
210  01   1
211  22  INV
212  44  SUM
213  02   02
214  43  RCL
215  02   02
216  75   -
217  43  RCL
218  00   00
219  95   =
220  42  STO
221  04   04
222  43  RCL
223  01   01
224  85   +
225  43  RCL
226  00   00
227  65   ×
228  53   (
229  43  RCL
230  00   00
231  85   +
232  01   1
233  54   )
234  75   -
235  01   1
236  95   =
237  42  STO
238  05   05
239  97  DSZ
240  09   09
241  90  LST
242  43  RCL
243  00   00
244  42  STO
245  02   02
246  43  RCL
247  00   00
248  33  X²
249  85   +
250  43  RCL
251  01   01
252  95   =
253  42  STO
254  03   03
255  76  LBL
256  88  DMS
257  73  RC*
258  03   03
259  91  R/S
260  01   1
261  44  SUM
262  03   03
263  97  DSZ
264  02   02
265  88  DMS
266  91  R/S
267  76  LBL
268  16  A'
269  43  RCL
270  01   01
271  85   +
272  43  RCL
273  00   00
274  33  X²
275  95   =
276  42  STO
277  02   02
278  01   1
279  42  STO
280  03   03
281  43  RCL
282  03   03
283  91  R/S
284  72  ST*
285  02   02
286  01   1
287  44  SUM
288  02   02
289  44  SUM
```

```
290  03  03
291  61  GTO
292  02  02
293  81  81
294  76  LBL
295  17  B'
296  29  CP
297  01  1
298  42  STO
299  04  04
300  43  RCL
301  00  00
302  42  STO
303  05  05
304  65  ×
305  03  3
306  85  +
307  43  RCL
308  00  00
309  33  X²
310  85  +
311  43  RCL
312  01  01
313  95  =
314  42  STO
315  07  07
316  76  LBL
317  22  INV
318  43  RCL
319  04  04
320  72  ST*
321  07  07
322  01  1
323  44  SUM
324  04  04
325  44  SUM
326  07  07
327  97  DSZ
328  05  05
329  22  INV
330  43  RCL
331  01  01
332  85  +
333  43  RCL
334  00  00
335  33  X²
336  95  =
337  42  STO
338  07  07
339  85  +
340  43  RCL
341  00  00
342  95  =
343  42  STO
344  04  04
345  85  +
346  02  2
347  65  ×
348  43  RCL
349  00  00
350  95  =
351  42  STO
352  06  06
353  43  RCL
354  00  00
355  75  -
356  01  1
357  95  =
358  42  STO
359  08  08
360  76  LBL
361  23  LNX
362  43  RCL
363  01  01
364  85  +
365  43  RCL
366  00  00
367  33  X²
368  95  =
369  42  STO
370  10  10
371  85  +
372  03  3
373  65  ×
374  43  RCL
375  00  00
376  95  =
377  42  STO
378  05  05
379  43  RCL
380  00  00
381  42  STO
382  09  09
383  76  LBL
384  24  CE
385  73  RC*
386  04  04
387  75  -
388  73  RC*
389  05  05
390  95  =
391  67  EQ
392  25  CLR
393  01  1
394  44  SUM
395  05  05
396  44  SUM
397  10  10
398  97  DSZ
399  09  09
400  24  CE
401  76  LBL
402  25  CLR
403  43  RCL
404  07  07
405  75  -
406  43  RCL
407  10  10
408  95  =
409  67  EQ
410  32  X:T
411  73  RC*
412  07  07
413  63  EX*
414  10  10
415  63  EX*
416  07  07
417  73  RC*
418  06  06
419  63  EX*
420  05  05
421  63  EX*
422  06  06
423  76  LBL
424  32  X:T
425  01  1
426  44  SUM
427  04  04
428  44  SUM
429  06  06
430  44  SUM
431  07  07
432  97  DSZ
433  08  08
434  23  LNX
435  61  GTO
436  14  D'
```

2.5 Inversion mit totaler Pivotsuche

Das Programm bestimmt die Inverse $A^{-1} = [a'_{ik}]$ einer regulären n,n-Matrix A mittels des Austauschverfahrens. Dabei wird in jedem Schritt innerhalb der bisher nicht getauschten Zeilen und Spalten eine totale Pivotsuche durchgeführt. Der jeweilige Pivot wird in die Hauptdiagonale getauscht. Nach Durchführung der Inversion werden die Zeilen und Spalten in natürlicher Reihenfolge geordnet.

Das Programm zerfällt in drei Teile und gestattet so die Anwendung auf Matrizen bis zur Ordnung n = 6.

Programminstruktionen

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
1	„Teil 1" einlesen (Block 1)			1
2	Programmbeginn „Teil 1"		A	1
3	Eingabe der Matrixordnung n	n	R/S	n
4	Eingabe der Nummer des ersten zu belegenden Speicherplatzes $k \geq 11$	k	R/S	1
5	Eingabe der Matrix A spaltenweise	a_{11}	R/S	2
		a_{21}	R/S	3
		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
		a_{nn}	R/S	n^2+1
6	Ende der Koeffizienteneingabe		B	0
7	„Teil 2" einlesen (Block 1, 2)			2
8	Programmbeginn „Teil 2"		C	0
9	„Teil 3" einlesen (Block 1, 2)			2
10	Programmbeginn „Teil 3"		D	
11	Ergebnisanzeige (A^{-1} spaltenweise)			a'_{11}
			R/S	a'_{21}
			$\vdots$	$\vdots$
			R/S	a'_{nn}

Registerinhalte

$R_{00}, \ldots, R_{10}$: Programmzeiger
$R_k, \ldots, R_{k+2n-1}$: Zeilen- und Spaltenindizes
$R_{k+2n}, \ldots, R_{k+n^2+2n-1}$: $a_{11}, \ldots, a_{nn}$

Bemerkungen

1. In den Registern $R_k, \ldots, R_{k+2n-1}$ werden die Zeilen- und Spaltenvertauschungen gespeichert und für den Rücktausch von dort abgerufen.
2. Ist A singulär, so hält das Programm während der Ausführung von „Teil 2" und zeigt dieses durch eine blinkende Anzeige an.

Beispiel

Gesucht ist die Inverse der Matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Anmerkungen		Eingabe	Taste	Anzeige
„Teil 1" einlesen (Block 1)				1
Programmbeginn „Teil 1"			A	1
Eingabe von:	n	3	R/S	3
	k	11	R/S	
				1
Eingabe von:	a_{11}	2	R/S	2
	a_{21}	1	R/S	3
	a_{31}	2	R/S	4
	a_{12}	2	R/S	5
	a_{22}	1	R/S	6
	a_{32}	1	R/S	7
	a_{13}	0	R/S	8
	a_{23}	2	R/S	9
	a_{33}	1	R/S	10
Ende der Koeffizienteneingabe			B	
				0
„Teil 2" einlesen (Block 1, 2)				2
Programmbeginn „Teil 2"			C	
				0
„Teil 3" einlesen (Block 1, 2)				2
Programmbeginn „Teil 3"			D	
Anzeige von:	a'_{11}			–0.25
	a'_{21}		R/S	0.75
	a'_{31}		R/S	–0.25
	a'_{12}		R/S	–0.5
	a'_{22}		R/S	0.5
	a'_{32}		R/S	0.5
	a'_{13}		R/S	1
	a'_{23}		R/S	–1
	a'_{33}		R/S	0

Es ist also $A^{-1} = \begin{bmatrix} -0.25 & -0.5 & 1 \\ 0.75 & 0.5 & -1 \\ -0.25 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$.

Programm 2.5	Inversion mit totaler Pivotsuche

Teil 1

```
000  76 LBL
001  11  A
002  91 R/S
003  42 STO
004  00  00
005  91 R/S
006  42 STO
007  01  01
008  85  +
009  02  2
010  65  ×
011  43 RCL
012  00  00
013  95  =
014  42 STO
015  02  02
016  01  1
017  42 STO
018  03  03
019  76 LBL
020  22 INV
021  43 RCL
022  03  03
023  91 R/S
024  72 ST*
025  02  02
026  01  1
027  44 SUM
028  02  02
029  44 SUM
030  03  03
031  61 GTO
032  22 INV
033  76 LBL
034  12  B
035  43 RCL
036  01  01
037  42 STO
038  02  02
039  85  +
040  43 RCL
041  00  00
042  95  =
043  42 STO
044  03  03
045  01  1
046  42 STO
047  04  04
048  43 RCL
049  00  00
050  42 STO
051  05  05
052  76 LBL
053  23 LNX
054  43 RCL
055  04  04
056  72 ST*
057  02  02
058  72 ST*
059  03  03
060  01  1
061  44 SUM
062  02  02
063  44 SUM
064  03  03
065  44 SUM
066  04  04
067  97 DSZ
068  05  05
069  23 LNX
070  43 RCL
071  00  00
072  42 STO
073  02  02
074  25 CLR
075  91 R/S
```

Teil 2

```
000  76 LBL
001  13  C
002  43 RCL
003  01  01
004  85  +
005  43 RCL
006  00  00
007  65  ×
008  53  (
009  43 RCL
010  00  00
011  85  +
012  03  3
013  75  -
014  43 RCL
015  02  02
016  54  )
017  75  -
018  43 RCL
019  02  02
020  95  =
021  42 STO
022  03  03
023  43 RCL
024  02  02
025  42 STO
026  08  08
027  29 CP
028  76 LBL
029  24 CE
030  43 RCL
031  02  02
032  42 STO
033  09  09
034  76 LBL
035  25 CLR
036  73 RC*
037  03  03
038  50 I×I
039  22 INV
040  77  GE
041  32 X:T
042  32 X:T
043  43 RCL
044  00  00
045  85  +
046  01  1
047  75  -
048  43 RCL
049  09  09
050  95  =
051  42 STO
052  04  04
053  43 RCL
054  00  00
055  85  +
056  01  1
057  75  -
058  43 RCL
059  08  08
060  95  =
061  42 STO
062  05  05
063  76 LBL
064  32 X:T
065  01  1
066  44 SUM
067  03  03
068  97 DSZ
069  09  09
070  25 CLR
071  00  0
072  67  EQ
073  80 GRD
074  43 RCL
075  00  00
076  75  -
077  43 RCL
078  02  02
079  95  =
080  44 SUM
081  03  03
082  97 DSZ
083  08  08
084  24 CE
085  43 RCL
086  00  00
087  85  +
088  01  1
089  95  =
090  42 STO
091  08  08
092  43 RCL
093  01  01
094  85  +
095  43 RCL
096  00  00
097  65  ×
098  02  2
099  75  -
100  43 RCL
101  02  02
102  95  =
103  42 STO
104  03  03
105  43 RCL
106  01  01
107  85  +
108  43 RCL
109  00  00
110  85  +
111  43 RCL
112  04  04
113  75  -
114  01  1
115  95  =
116  42 STO
117  06  06
118  43 RCL
119  03  03
120  32 X:T
121  43 RCL
122  06  06
123  67  EQ
```

124	65	×	186	53	(	248	42	STO	310	76	LBL
125	76	LBL	187	02	2	249	09	09	311	44	SUM
126	55	÷	188	85	+	250	85	+	312	43	RCL
127	73	RC*	189	43	RCL	251	43	RCL	313	04	04
128	03	03	190	00	00	252	00	00	314	67	EQ
129	63	EX*	191	75	-	253	75	-	315	43	RCL
130	06	06	192	43	RCL	254	43	RCL	316	73	RC*
131	63	EX*	193	02	02	255	02	02	317	09	09
132	03	03	194	54	)	256	95	=	318	65	×
133	43	RCL	195	95	=	257	42	STO	319	73	RC*
134	00	00	196	42	STO	258	07	07	320	10	10
135	44	SUM	197	03	03	259	73	RC*	321	55	÷
136	03	03	198	43	RCL	260	07	07	322	43	RCL
137	44	SUM	199	01	01	261	42	STO	323	07	07
138	06	06	200	85	+	262	07	07	324	95	=
139	97	DSZ	201	43	RCL	263	43	RCL	325	22	INV
140	08	08	202	00	00	264	02	02	326	74	SM*
141	55	÷	203	85	+	265	75	-	327	08	08
142	76	LBL	204	43	RCL	266	43	RCL	328	76	LBL
143	65	×	205	00	00	267	00	00	329	43	RCL
144	43	RCL	206	65	×	268	95	=	330	43	RCL
145	00	00	207	43	RCL	269	42	STO	331	00	00
146	42	STO	208	05	05	270	03	03	332	44	SUM
147	08	08	209	95	=	271	29	CP	333	08	08
148	85	+	210	42	STO	272	76	LBL	334	44	SUM
149	43	RCL	211	04	04	273	35	1/X	335	10	10
150	01	01	212	76	LBL	274	43	RCL	336	01	1
151	75	-	213	34	ΓX	275	03	03	337	44	SUM
152	43	RCL	214	73	RC*	276	67	EQ	338	04	04
153	02	02	215	03	03	277	42	STO	339	97	DSZ
154	95	=	216	63	EX*	278	43	RCL	340	06	06
155	42	STO	217	04	04	279	00	00	341	44	SUM
156	03	03	218	63	EX*	280	42	STO	342	76	LBL
157	43	RCL	219	03	03	281	06	06	343	42	STO
158	01	01	220	01	1	282	65	×	344	01	1
159	85	+	221	44	SUM	283	03	3	345	44	SUM
160	43	RCL	222	03	03	284	85	+	346	03	03
161	05	05	223	44	SUM	285	43	RCL	347	44	SUM
162	75	-	224	04	04	286	01	01	348	09	09
163	01	1	225	97	DSZ	287	75	-	349	97	DSZ
164	95	=	226	08	08	288	43	RCL	350	05	05
165	42	STO	227	34	ΓX	289	02	02	351	35	1/X
166	04	04	228	76	LBL	290	95	=	352	43	RCL
167	43	RCL	229	85	+	291	42	STO	353	00	00
168	03	03	230	43	RCL	292	10	10	354	42	STO
169	32	X⇌T	231	00	00	293	85	+	355	05	05
170	43	RCL	232	42	STO	294	43	RCL	356	65	×
171	04	04	233	05	05	295	02	02	357	03	3
172	67	EQ	234	65	×	296	75	-	358	75	-
173	85	+	235	53	(	297	43	RCL	359	43	RCL
174	73	RC*	236	02	2	298	05	05	360	02	02
175	03	03	237	85	+	299	95	=	361	85	+
176	63	EX*	238	43	RCL	300	42	STO	362	43	RCL
177	04	04	239	00	00	301	08	08	363	01	01
178	63	EX*	240	75	-	302	43	RCL	364	95	=
179	03	03	241	43	RCL	303	02	02	365	42	STO
180	43	RCL	242	02	02	304	75	-	366	10	10
181	01	01	243	54	)	305	43	RCL	367	43	RCL
182	85	+	244	85	+	306	00	00	368	00	00
183	43	RCL	245	43	RCL	307	95	=	369	75	-
184	00	00	246	01	01	308	42	STO	370	43	RCL
185	65	×	247	95	=	309	04	04	371	02	02

372	95	=
373	42	STO
374	09	09
375	76	LBL
376	45	Y^X
377	43	RCL
378	09	09
379	67	EQ
380	52	EE
381	43	RCL
382	07	07
383	94	+/-
384	22	INV
385	64	PD*
386	10	10
387	76	LBL
388	52	EE
389	01	1
390	44	SUM
391	09	09
392	43	RCL
393	00	00
394	44	SUM
395	10	10
396	97	DSZ
397	05	05
398	45	Y^X
399	43	RCL
400	00	00
401	42	STO
402	05	05
403	65	×
404	53	(
405	02	2
406	85	+
407	43	RCL
408	00	00
409	75	-
410	43	RCL
411	02	02
412	54	)
413	85	+
414	43	RCL
415	01	01
416	95	=
417	42	STO
418	09	09
419	43	RCL
420	00	00
421	75	-
422	43	RCL
423	02	02
424	95	=
425	42	STO
426	10	10
427	76	LBL
428	53	(
429	43	RCL
430	10	10
431	67	EQ
432	54	)
433	43	RCL
434	07	07
435	22	INV
436	64	PD*
437	09	09
438	76	LBL
439	54	)
440	01	1
441	44	SUM
442	09	09
443	44	SUM
444	10	10
445	97	DSZ
446	05	05
447	53	(
448	43	RCL
449	01	01
450	85	+
451	43	RCL
452	00	00
453	65	×
454	53	(
455	03	3
456	85	+
457	43	RCL
458	00	00
459	75	-
460	43	RCL
461	02	02
462	54	)
463	75	-
464	43	RCL
465	02	02
466	95	=
467	42	STO
468	08	08
469	43	RCL
470	07	07
471	35	1/X
472	72	ST*
473	08	08
474	97	DSZ
475	02	02
476	13	C
477	25	CLR
478	91	R/S

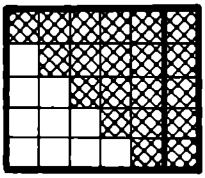
Teil 3

000	76	LBL
001	14	D
002	43	RCL
003	00	00
004	75	-
005	01	1
006	95	=
007	42	STO
008	02	02
009	76	LBL
010	28	LOG
011	43	RCL
012	00	00
013	75	-
014	43	RCL
015	02	02
016	95	=
017	42	STO
018	03	03
019	43	RCL
020	01	01
021	75	-
022	01	1
023	85	+
024	43	RCL
025	03	03
026	95	=
027	42	STO
028	04	04
029	43	RCL
030	02	02
031	85	+
032	01	1
033	95	=
034	42	STO
035	05	05
036	76	LBL
037	29	CP
038	73	RC*
039	04	04
040	75	-
041	43	RCL
042	03	03
043	95	=
044	22	INV
045	67	EQ
046	38	SIN
047	43	RCL
048	02	02
049	85	+
050	01	1
051	75	-
052	43	RCL
053	05	05
054	95	=
055	67	EQ
056	39	COS
057	43	RCL
058	00	00
059	75	-
060	43	RCL
061	02	02
062	85	+
063	43	RCL
064	01	01
065	75	-
066	01	1
067	95	=
068	42	STO
069	06	06
070	73	RC*
071	04	04
072	63	EX*
073	06	06
074	63	EX*
075	04	04
076	02	2
077	65	×
078	43	RCL
079	00	00
080	95	=
081	44	SUM
082	04	04
083	44	SUM
084	06	06
085	43	RCL
086	00	00
087	42	STO
088	07	07
089	76	LBL
090	30	TAN
091	73	RC*
092	04	04
093	63	EX*
094	06	06
095	63	EX*
096	04	04
097	43	RCL
098	00	00
099	44	SUM
100	04	04
101	44	SUM
102	06	06
103	97	DSZ
104	07	07
105	30	TAN
106	61	GTO
107	39	COS
108	76	LBL
109	38	SIN
110	01	1
111	44	SUM
112	04	04
113	97	DSZ
114	05	05
115	29	CP

```
116  76 LBL
117  39 COS
118  97 DSZ
119  02  02
120  28 LOG
121  43 RCL
122  00  00
123  75  -
124  01  1
125  95  =
126  42 STO
127  02  02
128  76 LBL
129  99 PRT
130  43 RCL
131  00  00
132  75  -
133  43 RCL
134  02  02
135  95  =
136  42 STO
137  03  03
138  43 RCL
139  01  01
140  85  +
141  43 RCL
142  00  00
143  75  -
144  01  1
145  85  +
146  43 RCL
147  03  03
148  95  =
149  42 STO
150  04  04
151  43 RCL
152  02  02
153  85  +
154  01  1
155  95  =
156  42 STO
157  05  05
158  76 LBL
159  98 ADV
160  73 RC*
161  04  04
162  75  -
163  43 RCL
164  03  03
165  95  =
166  22 INV
167  67  EQ
168  97 DSZ
169  43 RCL
170  02  02
171  85  +
172  01  1
173  75  -
174  43 RCL
175  05  05
176  95  =
177  67  EQ
178  96 WRT
179  02  2
180  65  ×
181  43 RCL
182  00  00
183  75  -
184  43 RCL
185  02  02
186  85  +
187  43 RCL
188  01  01
189  75  -
190  01  1
191  95  =
192  42 STO
193  06  06
194  73 RC*
195  04  04
196  63 EX*
197  06  06
198  63 EX*
199  04  04
200  43 RCL
201  01  01
202  85  +
203  43 RCL
204  00  00
205  85  +
206  43 RCL
207  03  03
208  65  ×
209  43 RCL
210  00  00
211  95  =
212  42 STO
213  04  04
214  85  +
215  53  (
216  43 RCL
217  02  02
218  75  -
219  43 RCL
220  05  05
221  85  +
222  01  1
223  54  )
224  65  ×
225  43 RCL
226  00  00
227  95  =
228  42 STO
229  06  06
230  43 RCL
231  00  00
232  42 STO
233  07  07
234  76 LBL
235  90 LST
236  73 RC*
237  04  04
238  63 EX*
239  06  06
240  63 EX*
241  04  04
242  01  1
243  44 SUM
244  04  04
245  44 SUM
246  06  06
247  97 DSZ
248  07  07
249  90 LST
250  61 GTO
251  96 WRT
252  76 LBL
253  97 DSZ
254  01  1
255  44 SUM
256  04  04
257  97 DSZ
258  05  05
259  98 ADV
260  76 LBL
261  96 WRT
262  97 DSZ
263  02  02
264  99 PRT
265  43 RCL
266  00  00
267  33 X²
268  42 STO
269  02  02
270  43 RCL
271  01  01
272  85  +
273  02  2
274  65  ×
275  43 RCL
276  00  00
277  95  =
278  42 STO
279  03  03
280  76 LBL
281  80 GRD
282  73 RC*
283  03  03
284  91 R/S
285  01  1
286  44 SUM
287  03  03
288  97 DSZ
289  02  02
290  80 GRD
291  91 R/S
```

2.6 Die Cholesky-Zerlegung

Eine reguläre, symmetrische, positiv-definite n,n-Matrix A läßt sich zerlegen in $A = C^T C$, wobei C eine rechte obere Dreiecksmatrix ist. Wie die LR-Zerlegung verwendet man auch die Cholesky-Zerlegung zur Lösung linearer Gleichungssysteme $A\mathbf{x} = \mathbf{a}$. Wegen der Symmetrie braucht man die Elemente von A unter der Hauptdiagonalen nicht abzuspeichern; eingegeben wird nur der in der Skizze schraffierte Teil der Matrix [A, **a**].



Das Programm wurde in zwei Teile zerlegt und gestattet so die Lösung linearer Gleichungssysteme bis zur Ordnung n = 8, bei Änderung der Speicherbereichsverteilung auf 70 Datenspeicher mittels der Tastenfolge 7 2nd Op 17 sogar der Ordnung n = 9.

Programminstruktionen

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
1	„Teil 1" einlesen (Block 1, 2)			2
2	Programmbeginn „Teil 1"		A	2
3	Eingabe der Nummer des ersten zu belegenden Speicherplatzes $k \geq 11$	k	R/S	1
4	Eingabe der Elemente von A oberhalb und einschließlich der Hauptdiagonalen spaltenweise, anschließend Eingabe der Elemente von a	a_{11} a_{12} a_{22} a_{13} ⋮ a_{nn} a_1 ⋮ a_n	R/S R/S R/S R/S ⋮ R/S R/S ⋮ R/S	2 3 4 5 ⋮ $\frac{n^2+n+2}{2}$ $\frac{n^2+n+4}{2}$ ⋮ $\frac{n^2+3n+2}{2}$
5	Ende der Koeffizienteneingabe		B	0
6	Eingabe von n und k	n k	R/S R/S	0 0
7	„Teil 2" einlesen (Block 1, 2)			2
8	Programmbeginn „Teil 2"		C	
9	Ergebnisanzeige		 R/S ⋮ R/S	x_1 x_2 ⋮ x_n
10	Eingabe einer neuen „rechten Seite" a'	 a'_1 ⋮ a'_n	A' R/S ⋮ R/S	1 2 ⋮ n+1
11	Ende der Koeffizienteneingabe		C	
12	Ergebnisanzeige		 R/S ⋮ R/S	x'_1 x'_2 ⋮ x'_n

Registerinhalte

$R_{00}, \ldots, R_{10}$: Programmzeiger

$R_k, \ldots, R_{k+\frac{n(n+1)}{2}-1}$: $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, \ldots, a_{nn}$

$R_{k+\frac{n(n+1)}{2}}, \ldots, R_{k+\frac{n(n+3)}{2}-1}$: $a_1, \ldots, a_n$

Bemerkung

Ist eine Cholesky-Zerlegung von A nicht möglich, so hält das Programm und der Rechner zeigt dies durch eine blinkende Anzeige an.

Beispiel

Gesucht ist die Lösung der linearen Gleichungssysteme $Ax = a$ und $Ax = a'$ mit

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad a = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix}, \qquad a' = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Anmerkungen	Eingabe	Taste	Anzeige
„Teil 1" einlesen (Block 1, 2)			2
Programmbeginn „Teil 1"		A	2
Eingabe von: k	11	R/S	1
a_{11}	2	R/S	2
a_{12}	1	R/S	3
a_{22}	4	R/S	4
a_{13}	0	R/S	5
a_{23}	1	R/S	6
a_{33}	2	R/S	7
a_1	5	R/S	8
a_2	9	R/S	9
a_3	7	R/S	10
Ende der Koeffizienteneingabe		B	0
Eingabe von: n	3	R/S	0
k	11	R/S	
			0
„Teil 2" einlesen (Block 1, 2)			2
Programmbeginn „Teil 2"		C	
Anzeige von: x_1			2
x_2		R/S	1
x_3		R/S	3
neue „rechte Seite" a'		A'	1

Anmerkungen	Eingabe	Taste	Anzeige
Eingabe von: a'_1	1	R/S	2
a'_2	−1	R/S	3
a'_3	3	R/S	4
Ende der Koeffizienteneingabe		C	
Anzeige von: x'_1			1
x'_2		R/S	−1
x'_3		R/S	2

Programm 2.6	**Die Cholesky-Zerlegung**

Teil 1

```
000  76 LBL
001  11  A
002  29 CP
003  91 R/S
004  42 STO
005  02  02
006  01  1
007  42 STO
008  03  03
009  43 RCL
010  03  03
011  91 R/S
012  72 ST*
013  02  02
014  01  1
015  44 SUM
016  03  03
017  44 SUM
018  02  02
019  61 GTO
020  00  00
021  09  09
022  76 LBL
023  12  B
024  25 CLR
025  91 R/S
026  42 STO
027  00  00
028  75  -
029  01  1
030  95  =
031  42 STO
032  09  09
033  75  -
034  01  1
035  95  =
036  42 STO
037  07  07
038  25 CLR
039  91 R/S
040  42 STO
041  01  01
042  42 STO
043  02  02
044  85  +
045  01  1
046  95  =
047  42 STO
048  03  03
049  73 RC*
050  02  02
051  22 INV
052  77  GE
053  99 PRT
054  67  EQ
055  99 PRT
056  34 ΓX
057  72 ST*
058  02  02
059  76 LBL
060  22 INV
061  73 RC*
062  02  02
063  22 INV
064  64 PD*
065  03  03
066  43 RCL
067  00  00
068  85  +
069  01  1
070  75  -
071  43 RCL
072  09  09
073  95  =
074  44 SUM
075  03  03
076  97 DSZ
077  09  09
078  22 INV
079  43 RCL
080  01  01
081  85  +
082  01  1
083  95  =
084  42 STO
085  03  03
086  85  +
087  01  1
088  95  =
089  42 STO
090  02  02
091  73 RC*
092  03  03
093  33 X²
094  22 INV
095  74 SM*
096  02  02
097  73 RC*
098  02  02
099  34 ΓX
100  72 ST*
101  02  02
102  02  2
103  44 SUM
104  02  02
105  76 LBL
106  23 LNX
107  43 RCL
108  00  00
109  75  -
110  43 RCL
111  07  07
112  75  -
113  01  1
114  95  =
115  42 STO
116  08  08
117  53  (
118  43 RCL
119  00  00
120  75  -
121  43 RCL
122  07  07
123  54  )
124  65  ×
125  53  (
126  43 RCL
127  00  00
128  75  -
129  43 RCL
130  07  07
131  85  +
132  01  1
133  54  )
134  55  ÷
135  02  2
136  85  +
137  43 RCL
138  01  01
139  95  =
140  42 STO
141  04  04
142  43 RCL
143  01  01
144  85  +
145  02  2
146  95  =
147  42 STO
148  05  05
149  01  1
150  42 STO
151  10  10
152  76 LBL
153  24 CE
154  43 RCL
155  10  10
```

```
156   42  STD
157   09   09
158   76  LBL
159   25  CLR
160   73  RC*
161   03   03
162   65   ×
163   73  RC*
164   04   04
165   95   =
166   22  INV
167   74  SM*
168   02   02
169   01   1
170   44  SUM
171   03   03
172   44  SUM
173   04   04
174   97  DSZ
175   09   09
176   25  CLR
177   73  RC*
178   05   05
179   67   EQ
```

```
180   99  PRT
181   22  INV
182   64  PD*
183   02   02
184   43  RCL
185   10   10
186   22  INV
187   44  SUM
188   04   04
189   01   1
190   44  SUM
191   10   10
192   44  SUM
193   02   02
194   44  SUM
195   03   03
196   43  RCL
197   10   10
198   85   +
199   01   1
200   95   =
201   44  SUM
202   05   05
203   97  DSZ
```

```
204   08   08
205   24  CE
206   43  RCL
207   00   00
208   75   -
209   43  RCL
210   07   07
211   95   =
212   42  STD
213   09   09
214   76  LBL
215   32  X:T
216   73  RC*
217   04   04
218   33  X²
219   22  INV
220   74  SM*
221   02   02
222   01   1
223   44  SUM
224   04   04
225   97  DSZ
226   09   09
227   32  X:T
```

```
228   73  RC*
229   02   02
230   22  INV
231   77   GE
232   99  PRT
233   34  ΓX
234   72  ST*
235   02   02
236   02   2
237   44  SUM
238   04   04
239   44  SUM
240   02   02
241   43  RCL
242   01   01
243   85   +
244   01   1
245   95   =
246   42  STD
247   03   03
248   97  DSZ
249   07   07
250   23  LNX
251   25  CLR
252   91  R/S
```

Teil 2

```
000   76  LBL
001   13   C
002   43  RCL
003   01   01
004   42  STD
005   03   03
006   85   +
007   43  RCL
008   00   00
009   65   ×
010   53   (
011   43  RCL
012   00   00
013   85   +
014   01   1
015   54   )
016   55   ÷
017   02   2
018   95   =
019   42  STD
020   04   04
021   85   +
022   01   1
023   95   =
024   42  STD
025   05   05
026   73  RC*
027   03   03
028   67   EQ
029   99  PRT
```

```
030   22  INV
031   64  PD*
032   04   04
033   01   1
034   44  SUM
035   03   03
036   43  RCL
037   00   00
038   75   -
039   01   1
040   95   =
041   42  STD
042   08   08
043   76  LBL
044   14   D
045   43  RCL
046   00   00
047   75   -
048   43  RCL
049   08   08
050   95   =
051   42  STD
052   09   09
053   76  LBL
054   15   E
055   73  RC*
056   03   03
057   65   ×
058   73  RC*
059   04   04
```

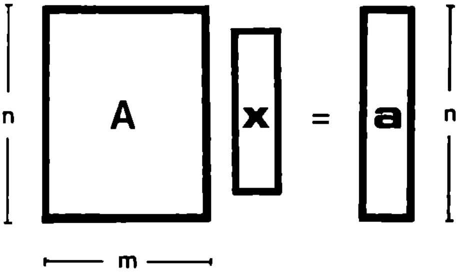
```
060   95   =
061   22  INV
062   74  SM*
063   05   05
064   01   1
065   44  SUM
066   03   03
067   44  SUM
068   04   04
069   97  DSZ
070   09   09
071   15   E
072   73  RC*
073   03   03
074   67   EQ
075   99  PRT
076   22  INV
077   64  PD*
078   05   05
079   01   1
080   44  SUM
081   03   03
082   43  RCL
083   01   01
084   85   +
085   43  RCL
086   00   00
087   65   ×
088   53   (
089   43  RCL
```

```
090   00   00
091   85   +
092   01   1
093   54   )
094   55   ÷
095   02   2
096   95   =
097   42  STD
098   04   04
099   01   1
100   44  SUM
101   05   05
102   97  DSZ
103   08   08
104   14   D
105   43  RCL
106   01   01
107   85   +
108   43  RCL
109   00   00
110   65   ×
111   53   (
112   43  RCL
113   00   00
114   85   +
115   01   1
116   54   )
117   55   ÷
118   02   2
119   75   -
```

120	01	1
121	95	=
122	42	STO
123	03	03
124	85	+
125	43	RCL
126	00	00
127	95	=
128	42	STO
129	04	04
130	75	-
131	01	1
132	95	=
133	42	STO
134	05	05
135	73	RC*
136	03	03
137	67	EQ
138	99	PRT
139	22	INV
140	64	PD*
141	04	04
142	01	1
143	22	INV
144	44	SUM
145	03	03
146	43	RCL
147	00	00
148	75	-
149	01	1
150	95	=
151	42	STO
152	08	08
153	76	LBL
154	10	E'
155	43	RCL
156	00	00
157	75	-
158	43	RCL
159	08	08
160	95	=
161	42	STO
162	09	09
163	43	RCL
164	00	00
165	75	-
166	01	1
167	95	=
168	42	STO
169	06	06
170	76	LBL
171	19	D'
172	73	RC*
173	03	03
174	65	×
175	73	RC*
176	04	04
177	95	=
178	22	INV
179	74	SM*
180	05	05
181	43	RCL
182	06	06
183	22	INV
184	44	SUM
185	03	03
186	01	1
187	94	+/-
188	44	SUM
189	06	06
190	44	SUM
191	04	04
192	97	DSZ
193	09	09
194	19	D'
195	73	RC*
196	03	03
197	67	EQ
198	99	PRT
199	22	INV
200	64	PD*
201	05	05
202	53	(
203	43	RCL
204	00	00
205	65	×
206	53	(
207	43	RCL
208	00	00
209	75	-
210	01	1
211	54	)
212	75	-
213	43	RCL
214	08	08
215	65	×
216	53	(
217	43	RCL
218	08	08
219	75	-
220	01	1
221	54	)
222	54	)
223	55	÷
224	02	2
225	75	-
226	01	1
227	95	=
228	44	SUM
229	03	03
230	43	RCL
231	01	01
232	85	+
233	43	RCL
234	00	00
235	65	×
236	53	(
237	43	RCL
238	00	00
239	85	+
240	01	1
241	54	)
242	55	÷
243	02	2
244	75	-
245	01	1
246	85	+
247	43	RCL
248	00	00
249	95	=
250	42	STO
251	04	04
252	01	1
253	22	INV
254	44	SUM
255	05	05
256	97	DSZ
257	08	08
258	10	E'
259	43	RCL
260	01	01
261	85	+
262	43	RCL
263	00	00
264	65	×
265	53	(
266	43	RCL
267	00	00
268	85	+
269	01	1
270	54	)
271	55	÷
272	02	2
273	95	=
274	42	STO
275	02	02
276	43	RCL
277	00	00
278	42	STO
279	09	09
280	76	LBL
281	33	X^2
282	73	RC*
283	02	02
284	91	R/S
285	01	1
286	44	SUM
287	02	02
288	97	DSZ
289	09	09
290	33	X^2
291	91	R/S
292	76	LBL
293	16	A'
294	43	RCL
295	01	01
296	85	+
297	43	RCL
298	00	00
299	65	×
300	53	(
301	43	RCL
302	00	00
303	85	+
304	01	1
305	54	)
306	55	÷
307	02	2
308	95	=
309	42	STO
310	02	02
311	01	1
312	42	STO
313	03	03
314	76	LBL
315	34	√X
316	43	RCL
317	03	03
318	91	R/S
319	72	ST*
320	02	02
321	01	1
322	44	SUM
323	02	02
324	44	SUM
325	03	03
326	61	GTO
327	34	√X

2.7 Die QR-Zerlegung und vermittelndes Ausgleichen

Die QR-Zerlegung nach Householder führt eine n,m-Matrix A mit $n \geq m$ und rang $A = m$ durch Multiplikation mit einer orthonormalen Matrix Q in eine rechte obere Dreiecksmatrix R über. Der Algorithmus ist numerisch besonders günstig bei linearen Gleichungssystemen $A\mathbf{x} = \mathbf{a}$, deren Koeffizientenmatrix A schlecht konditioniert ist (d.h. deren Zeilen bzw. Spalten nahezu linear abhängig sind). Außerdem liefert die QR-Zerlegung die Lösung überbestimmter linearer Gleichungssysteme $A\mathbf{x} = \mathbf{a}$, A n,m-Matrix, $n > m$, nach der Gaußschen Methode der kleinsten Quadrate (vermittelndes Ausgleichen).



Das Programm wurde in zwei Teile zerlegt. In der folgenden Tabelle sind die bei normaler Speicherbereichsverteilung zulässigen Matrizenformate mit „+" markiert; ändert man die Speicherbereichsverteilung mittels der Tastenfolge 8 2nd Op 17 auf 80 Datenspeicher, so sind auch die mit „o" gekennzeichneten Matrizenformate zulässig.

m \ n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	o	o	o	o
3		+	+	+	+	+	+	+	+	o	o	o	o	o					
4			+	+	+	+	+	o	o	o	o								
5				+	+	o	o	o	o										
6					o	o	o												
7						o													

Programminstruktionen

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
1	„Teil 1" einlesen (Block 1, 2)			2
2	Programmbeginn „Teil 1"		A	2
3	Eingabe der Nummer des ersten zu belegenden Speicherplatzes $k \geq 14$	k	R/S	1

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
4	Eingabe der Matrix [A, a] spaltenweise	a_{11}	R/S	2
		a_{21}	R/S	3
		⋮	⋮	⋮
		a_{nm}	R/S	mn+1
		a_1	R/S	mn+2
		⋮	⋮	⋮
		a_n	R/S	mn+n+1
5	Ende der Koeffizienteneingabe		B	0
6	Eingabe von n, m, k	n	R/S	n
		m	R/S	m
		k	R/S	
				0
7	„Teil 2" einlesen (Block 1)			1
8	Programmbeginn „Teil 2"		C	
9	Ergebnisanzeige			x_1
			R/S	x_2
			⋮	⋮
			R/S	x_m

Registerinhalte

$R_{00}, \ldots, R_{13}$: Programmzeiger
$R_k, \ldots, R_{k+mn-1}$: $a_{11}, \ldots, a_{nm}$
$R_{k+mn}, \ldots, R_{k+mn+n-1}$: $a_1, \ldots, a_n$
$R_{k+mn+n}, \ldots, R_{k+mn+n+m-1}$: $s_1, \ldots, s_m$

Bemerkung

Die $s_1, \ldots, s_m$ sind Koeffizienten, die bei der Berechnung von $R = Q^T A$ auftauchen.

Beispiele

1. Gesucht ist die Lösung des linearen Gleichungssystems $A\mathbf{x} = \mathbf{a}$ mit der nahezu singulären Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1.1 & 1.1 \\ 1 & 0.9 & 0.9 \\ 0 & -0.1 & 0.2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0.3 \end{bmatrix}$$

Anmerkungen	Eingabe	Taste	Anzeige
„Teil 1" einlesen (Block 1, 2)			2
Programmbeginn „Teil 1"		A	2
Eingabe von: k	14	R/S	1
a_{11}	1	R/S	2
a_{21}	1	R/S	3
a_{31}	0	R/S	4
a_{12}	1.1	R/S	5
a_{22}	0.9	R/S	6
a_{32}	−0.1	R/S	7
a_{13}	1.1	R/S	8
a_{23}	0.9	R/S	9
a_{33}	0.2	R/S	10
a_1	1	R/S	11
a_2	1	R/S	12
a_3	0.3	R/S	13
Ende der Koeffizienteneingabe		B	0
Eingabe von: n	3	R/S	3
m	3	R/S	3
k	14	R/S	
			0
„Teil 2" einlesen (Block 1)			1
Programmbeginn „Teil 2"		C	
Anzeige von: x_1			1
x_2		R/S	−1
x_3		R/S	1

2. Es soll eine Parabel $y = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$ durch die vier Punkte der Tabelle

t	−1	0	1	3
y	2	1	2	3

gelegt werden. Durch Einsetzen der Punkte in die Parabelgleichung erhält man das überbestimmte lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Anmerkungen	Eingabe	Taste	Anzeige
„Teil 1" einlesen (Block 1, 2)			2
Programmbeginn „Teil 1"		A	2
Eingabe von: k	14	R/S	1
a_{11}	1	R/S	2
a_{21}	1	R/S	3
a_{31}	1	R/S	4
a_{41}	1	R/S	5
a_{12}	−1	R/S	6
a_{22}	0	R/S	7
a_{32}	1	R/S	8
a_{42}	2	R/S	9
a_{13}	1	R/S	10
a_{23}	0	R/S	11
a_{33}	1	R/S	12
a_{43}	4	R/S	13
a_1	2	R/S	14
a_2	1	R/S	15
a_3	2	R/S	16
a_4	3	R/S	17
Ende der Koeffizienteneingabe		B	0
Eingabe von: n	4	R/S	4
m	3	R/S	3
k	14	R/S	
			0
„Teil 2" einlesen (Block 1)			1
Programmbeginn „Teil 2"		C	
Anzeige von: c_0			1.3
c_1		R/S	−0.1
c_2		R/S	0.5

Die gesuchte Ausgleichsparabel ist also

$$y = 1.3 - 0.1 \cdot t + 0.5 \cdot t^2 .$$

Programm 2.7	**Die QR-Zerlegung**

Teil 1

000	76	LBL	056	05	05	112	43	RCL	168	04	04
001	11	A	057	42	STO	113	00	00	169	97	DSZ
002	29	CP	058	04	04	114	85	+	170	09	09
003	91	R/S	059	43	RCL	115	43	RCL	171	19	D'
004	42	STO	060	10	10	116	10	10	172	43	RCL
005	00	00	061	42	STO	117	95	=	173	13	13
006	01	1	062	09	09	118	42	STO	174	67	EQ
007	42	STO	063	76	LBL	119	08	08	175	99	PRT
008	01	01	064	14	D	120	43	RCL	176	22	INV
009	43	RCL	065	73	RC*	121	05	05	177	64	PD*
010	01	01	066	04	04	122	42	STO	178	06	06
011	91	R/S	067	33	X^2	123	03	03	179	43	RCL
012	72	ST*	068	44	SUM	124	85	+	180	10	10
013	00	00	069	11	11	125	43	RCL	181	22	INV
014	01	1	070	01	1	126	00	00	182	44	SUM
015	44	SUM	071	44	SUM	127	95	=	183	03	03
016	00	00	072	04	04	128	42	STO	184	01	1
017	44	SUM	073	97	DSZ	129	04	04	185	44	SUM
018	01	01	074	09	09	130	43	RCL	186	06	06
019	61	GTO	075	14	D	131	02	02	187	43	RCL
020	00	00	076	43	RCL	132	85	+	188	00	00
021	08	08	077	11	11	133	43	RCL	189	75	-
022	76	LBL	078	34	ΓX	134	00	00	190	43	RCL
023	12	B	079	42	STO	135	65	×	191	10	10
024	25	CLR	080	12	12	136	53	(	192	95	=
025	91	R/S	081	73	RC*	137	43	RCL	193	44	SUM
026	42	STO	082	05	05	138	01	01	194	04	04
027	00	00	083	22	INV	139	85	+	195	97	DSZ
028	42	STO	084	77	GE	140	01	1	196	08	08
029	10	10	085	15	E	141	54	)	197	10	E'
030	91	R/S	086	43	RCL	142	95	=	198	43	RCL
031	42	STO	087	12	12	143	42	STO	199	01	01
032	01	01	088	94	+/-	144	06	06	200	75	-
033	91	R/S	089	42	STO	145	76	LBL	201	43	RCL
034	42	STO	090	12	12	146	10	E'	202	00	00
035	02	02	091	76	LBL	147	43	RCL	203	85	+
036	42	STO	092	15	E	148	10	10	204	43	RCL
037	05	05	093	43	RCL	149	42	STO	205	10	10
038	43	RCL	094	11	11	150	09	09	206	95	=
039	01	01	095	75	-	151	00	0	207	42	STO
040	42	STO	096	73	RC*	152	72	ST*	208	08	08
041	07	07	097	05	05	153	06	06	209	43	RCL
042	75	-	098	65	×	154	76	LBL	210	05	05
043	43	RCL	099	43	RCL	155	19	D'	211	42	STO
044	00	00	100	12	12	156	73	RC*	212	04	04
045	95	=	101	95	=	157	03	03	213	85	+
046	22	INV	102	42	STO	158	65	×	214	43	RCL
047	67	EQ	103	13	13	159	73	RC*	215	00	00
048	33	X^2	104	43	RCL	160	04	04	216	95	=
049	01	1	105	12	12	161	95	=	217	42	STO
050	22	INV	106	22	INV	162	74	SM*	218	03	03
051	44	SUM	107	74	SM*	163	06	06	219	43	RCL
052	07	07	108	05	05	164	01	1	220	02	02
053	76	LBL	109	43	RCL	165	44	SUM	221	85	+
054	33	X^2	110	01	01	166	03	03	222	43	RCL
055	43	RCL	111	75	-	167	44	SUM	223	00	00

224	65	×
225	53	(
226	43	RCL
227	01	01
228	85	+
229	01	1
230	54	)
231	95	=
232	42	STO
233	06	06
234	76	LBL
235	18	C'
236	43	RCL
237	10	10
238	42	STO
239	09	09
240	76	LBL
241	17	B'
242	73	RC*
243	06	06
244	65	×
245	73	RC*
246	04	04
247	95	=
248	22	INV
249	74	SM*
250	03	03
251	01	1
252	44	SUM
253	04	04
254	44	SUM
255	03	03
256	97	DSZ
257	09	09
258	17	B'
259	43	RCL
260	10	10
261	22	INV
262	44	SUM
263	04	04
264	43	RCL
265	00	00
266	75	-
267	43	RCL
268	10	10
269	95	=
270	44	SUM
271	03	03
272	01	1
273	44	SUM
274	06	06
275	97	DSZ
276	08	08
277	18	C'
278	00	0
279	42	STO
280	11	11
281	43	RCL
282	12	12
283	72	ST*
284	05	05
285	43	RCL
286	00	00
287	85	+
288	01	1
289	95	=
290	44	SUM
291	05	05
292	01	1
293	22	INV
294	44	SUM
295	10	10
296	97	DSZ
297	07	07
298	33	X²
299	25	CLR
300	91	R/S

Teil 2

000	76	LBL
001	13	C
002	43	RCL
003	02	02
004	85	+
005	53	(
006	43	RCL
007	01	01
008	75	-
009	01	1
010	54	)
011	65	×
012	53	(
013	43	RCL
014	00	00
015	85	+
016	01	1
017	54	)
018	95	=
019	42	STO
020	03	03
021	85	+
022	43	RCL
023	00	00
024	95	=
025	42	STO
026	04	04
027	73	RC*
028	03	03
029	22	INV
030	64	PD*
031	04	04
032	01	1
033	22	INV
034	44	SUM
035	03	03
036	43	RCL
037	04	04
038	75	-
039	01	1
040	95	=
041	42	STO
042	05	05
043	43	RCL
044	01	01
045	75	-
046	01	1
047	95	=
048	42	STO
049	09	09
050	76	LBL
051	23	LNX
052	43	RCL
053	01	01
054	75	-
055	43	RCL
056	09	09
057	95	=
058	42	STO
059	08	08
060	76	LBL
061	22	INV
062	73	RC*
063	03	03
064	65	×
065	73	RC*
066	04	04
067	95	=
068	22	INV
069	74	SM*
070	05	05
071	01	1
072	22	INV
073	44	SUM
074	04	04
075	43	RCL
076	00	00
077	22	INV
078	44	SUM
079	03	03
080	97	DSZ
081	08	08
082	22	INV
083	73	RC*
084	03	03
085	22	INV
086	64	PD*
087	05	05
088	43	RCL
089	01	01
090	75	-
091	43	RCL
092	09	09
093	95	=
094	44	SUM
095	04	04
096	65	×
097	43	RCL
098	00	00
099	75	-
100	01	1
101	95	=
102	44	SUM
103	03	03
104	01	1
105	22	INV
106	44	SUM
107	05	05
108	97	DSZ
109	09	09
110	23	LNX
111	43	RCL
112	01	01
113	42	STO
114	08	08
115	43	RCL
116	02	02
117	85	+
118	43	RCL
119	01	01
120	65	×
121	43	RCL
122	00	00
123	95	=
124	42	STO
125	03	03
126	76	LBL
127	24	CE
128	73	RC*
129	03	03
130	91	R/S
131	01	1
132	44	SUM
133	03	03
134	97	DSZ
135	08	08
136	24	CE
137	91	R/S

2.8 Zyklische Relaxation

Zu einem linearen Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{a}$ (A n,n-Matrix) sei eine Näherungslösung $\mathbf{p}$ mit dem Residuum

$$\mathbf{r} := A\mathbf{p} - \mathbf{a} \neq \mathbf{0}$$

gegeben. Die Idee der Koordinatenrelaxation besteht darin, eine Komponente p_j der Näherungslösung $\mathbf{p}$ so zu ändern, daß die zugehörige Komponente r_j des Residuums $\mathbf{r}$ zu Null wird. Bei diesem Algorithmus werden alle Koordinaten p_j der Reihe nach so oft abgearbeitet, bis die Tschebyscheff-Norm des Residuums $\|\mathbf{r}\|_\infty$ eine vorgegebene Toleranz $\sigma > 0$ unterschreitet.

Das Programm bearbeitet lineare Gleichungssysteme bis zur Ordnung n = 5, bei Änderung der Speicherbereichsverteilung auf 80 Datenspeicher mittels der Tastenfolge 8 2nd Op 17 bis zur Ordnung n = 7.

Programminstruktionen

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
1	Magnetkarte einlesen (Block 1, 2)			2
2	Programmbeginn		A	2
3	Eingabe der Nummer des ersten zu belegenden Speicherplatzes $k \geq 10$	k	R/S	1
4	Eingabe der Matrix [A, **a**, **p**] spaltenweise	a_{11}	R/S	2
		a_{21}	R/S	3
		⋮	⋮	⋮
		a_{nn}	R/S	n^2+1
		a_1	R/S	n^2+2
		⋮	⋮	⋮
		a_n	R/S	n^2+n+1
		p_1	R/S	n^2+n+2
		⋮	⋮	⋮
		p_n	R/S	n^2+2n+1
5	Ende der Koeffizienteneingabe		B	0
6	Eingabe von σ, n, k	σ	R/S	0
		n	R/S	0
		k	R/S	
7	Ergebnisanzeige			$\bar{x}_1$
			R/S	$\bar{x}_2$
			⋮	⋮
			R/S	$\bar{x}_n$

Registerinhalte

$R_{00}, \ldots, R_{09}$: Programmzeiger
$R_k, \ldots, R_{k+n^2-1}$: $a_{11}, \ldots, a_{nn}$
$R_{k+n^2}, \ldots, R_{k+n^2+n-1}$: $a_1, \ldots, a_n$
$R_{k+n^2+n}, \ldots, R_{k+n^2+2n-1}$: $p_1, \ldots, p_n$
$R_{k+n^2+2n}, \ldots, R_{k+n^2+3n-1}$: $r_1, \ldots, r_n$

Beispiel

Zu dem linearen Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{a}$ mit $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ und $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$ sei die Näherungslösung $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.2 \\ -0.7 \end{bmatrix}$ gegeben. Gesucht ist eine verbesserte Näherung $\bar{\mathbf{x}}$ mit

$$\|\mathbf{r}\|_\infty = \|A\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{a}\|_\infty < 0.01 .$$

Anmerkungen		Eingabe	Taste	Anzeige
Magnetkarte einlesen (Block 1, 2)				2
Programmbeginn			A	2
Eingabe von:	k	10	R/S	1
	a_{11}	2	R/S	2
	a_{21}	1	R/S	3
	a_{31}	0	R/S	4
	a_{12}	1	R/S	5
	a_{22}	4	R/S	6
	a_{32}	1	R/S	7
	a_{13}	0	R/S	8
	a_{23}	1	R/S	9
	a_{33}	2	R/S	10
	a_1	2	R/S	11
	a_2	8	R/S	12
	a_3	2	R/S	13
	p_1	0.5	R/S	14
	p_2	1.2	R/S	15
	p_3	−0.7	R/S	16
Ende der Koeffizienteneingabe			B	0
Eingabe von:	σ	0.01	R/S	0
	n	3	R/S	0
	k	10	R/S	
Anzeige von:	$\bar{x}_1$			−0.00234375
	$\bar{x}_2$		R/S	2.001171875
	$\bar{x}_3$		R/S	−.0005859375

Die exakte Lösung ist $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Programm 2.8	**Zyklische Relaxation**

```
000  76  LBL
001  11  A
002  91  R/S
003  42  STO
004  02  02
005  01  1
006  42  STO
007  03  03
008  43  RCL
009  03  03
010  91  R/S
011  72  ST*
012  02  02
013  01  1
014  44  SUM
015  02  02
016  44  SUM
017  03  03
018  61  GTO
019  00  00
020  08  08
021  76  LBL
022  12  B
023  25  CLR
024  29  CP
025  91  R/S
026  32  X:T
027  25  CLR
028  91  R/S
029  42  STO
030  00  00
031  42  STO
032  08  08
033  42  STO
034  09  09
035  25  CLR
036  91  R/S
037  42  STO
038  01  01
039  42  STO
040  02  02
041  85  +
042  43  RCL
043  00  00
044  33  X²
045  85  +
046  43  RCL
047  00  00
048  95  =
049  42  STO
050  03  03
051  85  +
052  43  RCL
053  00  00
054  95  =
055  42  STO
056  04  04
057  76  LBL
058  13  C
059  43  RCL
060  00  00
061  42  STO
062  09  09
063  76  LBL
064  14  D
065  73  RC*
066  02  02
067  65  ×
068  73  RC*
069  03  03
070  95  =
071  74  SM*
072  04  04
073  43  RCL
074  00  00
075  44  SUM
076  02  02
077  01  1
078  44  SUM
079  03  03
080  97  DSZ
081  09  09
082  14  D
083  43  RCL
084  00  00
085  22  INV
086  44  SUM
087  03  03
088  65  ×
089  43  RCL
090  00  00
091  75  -
092  01  1
093  95  =
094  22  INV
095  44  SUM
096  02  02
097  01  1
098  44  SUM
099  04  04
100  97  DSZ
101  08  08
102  13  C
103  43  RCL
104  00  00
105  42  STO
106  09  09
107  33  X²
108  85  +
109  43  RCL
110  01  01
111  95  =
112  42  STO
113  03  03
114  85  +
115  02  2
116  65  ×
117  43  RCL
118  00  00
119  95  =
120  42  STO
121  04  04
122  76  LBL
123  15  E
124  73  RC*
125  03  03
126  22  INV
127  74  SM*
128  04  04
129  01  1
130  44  SUM
131  03  03
132  44  SUM
133  04  04
134  97  DSZ
135  09  09
136  15  E
137  76  LBL
138  10  E'
139  43  RCL
140  01  01
141  42  STO
142  02  02
143  42  STO
144  03  03
145  85  +
146  43  RCL
147  00  00
148  33  X²
149  85  +
150  43  RCL
151  00  00
152  95  =
153  42  STO
154  04  04
155  85  +
156  43  RCL
157  00  00
158  95  =
159  42  STO
160  05  05
161  42  STO
162  06  06
163  43  RCL
164  00  00
165  42  STO
166  09  09
167  76  LBL
168  19  D'
169  73  RC*
170  05  05
171  94  +/-
172  55  ÷
173  73  RC*
174  02  02
175  95  =
176  42  STO
177  07  07
178  74  SM*
179  04  04
180  43  RCL
181  00  00
182  42  STO
183  08  08
184  76  LBL
185  16  A'
186  43  RCL
187  07  07
188  65  ×
189  73  RC*
190  03  03
191  95  =
192  74  SM*
193  06  06
194  01  1
195  44  SUM
196  03  03
197  44  SUM
198  06  06
199  97  DSZ
200  08  08
201  16  A'
202  43  RCL
203  00  00
204  22  INV
205  44  SUM
206  06  06
207  01  1
208  44  SUM
209  04  04
210  44  SUM
211  05  05
212  85  +
213  43  RCL
214  00  00
215  95  =
216  44  SUM
217  02  02
218  97  DSZ
219  09  09
220  19  D'
221  43  RCL
222  00  00
223  22  INV
224  44  SUM
225  05  05
226  42  STO
227  09  09
228  76  LBL
229  18  C'
230  73  RC*
231  05  05
232  50  I×I
233  77  GE
234  10  E'
235  01  1
```

```
236  44 SUM
237  05  05
238  97 DSZ
239  09  09
240  18 C'
241  43 RCL
242  01  01
243  85  +
244  43 RCL
245  00  00
246  33 X²
247  85  +
248  43 RCL
249  00  00
250  95  =
251  42 STO
252  04  04
253  43 RCL
254  00  00
255  42 STO
256  09  09
257  76 LBL
258  17 B'
259  73 RC*
260  04  04
261  91 R/S
262  01  1
263  44 SUM
264  04  04
265  97 DSZ
266  09  09
267  17 B'
268  91 R/S
```

2.9 Methode des verstärkten Abstiegs

Diese Methode zur Lösung eines linearen Gleichungssystems $A\mathbf{x} = \mathbf{a}$ mit symmetrischer und positiv-definiter n,n-Matrix A ist ein Relaxationsverfahren (siehe 2.8 „Zyklische Relaxation"), bei dem die Näherungslösung $\mathbf{p}$ nicht koordinatenweise, sondern in Richtung des Residuenvektors $\mathbf{r} = A\mathbf{p} - \mathbf{a}$ geändert wird. Der Algorithmus endet, wenn die euklidische Norm des Residuums $\mathbf{r}$ eine vorgegebene Toleranz $\sigma > 0$ unterschreitet.

Das Programm gestattet die Bearbeitung von linearen Gleichungssystemen bis zur Ordnung $n = 5$, bei Änderung der Speicherbereichsverteilung auf 70 Datenspeicher mittels der Tastenfolge 7 2nd Op 17 auch der Ordnung $n = 6$.

Programminstruktionen

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
1	Magnetkarte einlesen (Block 1, 2)			2
2	Programmbeginn		A	2
3	Eingabe der Nummer des ersten zu belegenden Speicherplatzes $k \geq 10$	k	R/S	1
4	Eingabe der Matrix [A, **a**, **p**] spaltenweise	a_{11}	R/S	2
		a_{21}	R/S	3
		⋮	⋮	⋮
		a_{nn}	R/S	n^2+1
		a_1	R/S	n^2+2
		⋮	⋮	⋮
		a_n	R/S	n^2+n+1
		p_1	R/S	n^2+n+2
		⋮	⋮	⋮
		p_n	R/S	n^2+2n+1

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
5	Ende der Koeffizienteneingabe		B	0
6	Eingabe von σ, n, k	σ	R/S	0
		n	R/S	0
		k	R/S	
7	Ergebnisanzeige			$\bar{x}_1$
			R/S	$\bar{x}_2$
			⋮	⋮
			R/S	$\bar{x}_n$

Registerinhalte

$R_{00}, \ldots, R_{09}$: Programmzeiger
$R_k, \ldots, R_{k+n^2-1}$: $a_{11}, \ldots, a_{nn}$
$R_{k+n^2}, \ldots, R_{k+n^2+n-1}$: $a_1, \ldots, a_n$
$R_{k+n^2+n}, \ldots, R_{k+n^2+2n-1}$: $p_1, \ldots, p_n$
$R_{k+n^2+2n}, \ldots, R_{k+n^2+3n-1}$: $r_1, \ldots, r_n$

Beispiel

Zu dem linearen Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{a}$ mit $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ und $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$ sei die Näherungslösung $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.2 \\ -0.7 \end{bmatrix}$ gegeben. Gesucht ist eine verbesserte Näherung $\bar{\mathbf{x}}$ mit

$$\|\mathbf{r}\|_2 = \|A\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{a}\|_2 < 0.005 .$$

Anmerkungen	Eingabe	Taste	Anzeige
Magnetkarte einlesen (Block 1, 2)			2
Programmbeginn		A	2
Eingabe von: k	10	R/S	1
a_{11}	2	R/S	2
a_{21}	1	R/S	3
a_{31}	0	R/S	4
a_{12}	1	R/S	5
a_{22}	4	R/S	6
a_{32}	1	R/S	7
a_{13}	0	R/S	8
a_{23}	1	R/S	9
a_{33}	2	R/S	10

Anmerkungen	Eingabe	Taste	Anzeige
a_1	2	R/S	11
a_2	8	R/S	12
a_3	2	R/S	13
p_1	0.5	R/S	14
p_2	1.2	R/S	15
p_3	−0.7	R/S	16
Ende der Koeffizienteneingabe		B	0
Eingabe von: σ	0.005	R/S	0
n	3	R/S	0
k	10	R/S	
Anzeige von: $\bar{x}_1$			.0009332064
$\bar{x}_2$		R/S	1.998317586
$\bar{x}_3$		R/S	.0009243247

Die exakte Lösung ist $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Programm 2.9	**Methode des stärksten Abstiegs**

```
000  76 LBL
001  11  A
002  91 R/S
003  42 STO
004  02  02
005  01  1
006  42 STO
007  03  03
008  43 RCL
009  03  03
010  91 R/S
011  72 ST*
012  02  02
013  01  1
014  44 SUM
015  02  02
016  44 SUM
017  03  03
018  61 GTO
019  00  00
020  08  08
021  76 LBL
022  12  B
023  25 CLR
024  91 R/S
025  32 X⇌T
026  25 CLR
027  91 R/S
028  42 STO
029  00  00
030  42 STO
031  02  02
032  25 CLR
033  91 R/S
034  42 STO
035  01  01
036  42 STO
037  06  06
038  85  +
039  43 RCL
040  00  00
041  33 X²
042  95  =
043  42 STO
044  07  07
045  85  +
046  43 RCL
047  00  00
048  95  =
049  42 STO
050  08  08
051  76 LBL
052  33 X²
053  43 RCL
054  00  00
055  42 STO
056  03  03
057  76 LBL
058  34 ΓX
059  73 RC*
060  06  06
061  65  ×
062  73 RC*
063  08  08
064  95  =
065  22 INV
066  74 SM*
067  07  07
068  43 RCL
069  00  00
070  44 SUM
071  06  06
072  01  1
073  44 SUM
074  08  08
075  97 DSZ
076  03  03
077  34 ΓX
078  73 RC*
079  07  07
080  94 +/-
081  72 ST*
082  07  07
083  01  1
084  44 SUM
085  07  07
086  43 RCL
087  00  00
088  22 INV
089  44 SUM
090  08  08
091  33 X²
092  75  -
093  01  1
094  95  =
095  22 INV
096  44 SUM
097  06  06
098  97 DSZ
099  02  02
100  33 X²
101  76 LBL
102  13  C
103  43 RCL
```

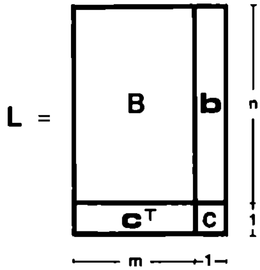
```
104  00  00
105  42  STO
106  02  02
107  43  RCL
108  01  01
109  42  STO
110  06  06
111  85  +
112  43  RCL
113  00  00
114  33  X²
115  95  =
116  42  STO
117  07  07
118  85  +
119  02  2
120  65  ×
121  43  RCL
122  00  00
123  95  =
124  42  STO
125  08  08
126  76  LBL
127  35  1/X
128  43  RCL
129  00  00
130  42  STO
131  03  03
132  00  0
133  72  ST*
134  08  08
135  76  LBL
136  43  RCL
137  73  RC*
138  06  06
139  65  ×
140  73  RC*
141  07  07
142  95  =
143  74  SM*
144  08  08
145  43  RCL
146  00  00
147  44  SUM
148  06  06
149  01  1
150  44  SUM
151  07  07
152  97  DSZ
153  03  03
154  43  RCL
155  43  RCL
156  00  00
157  22  INV
158  44  SUM
159  07  07
160  33  X²
161  75  -
162  01  1
163  95  =
164  22  INV
165  44  SUM
166  06  06
167  01  1
168  44  SUM
169  08  08
170  97  DSZ
171  02  02
172  35  1/X
173  43  RCL
174  01  01
175  85  +
176  43  RCL
177  00  00
178  33  X²
179  95  =
180  42  STO
181  06  06
182  85  +
183  02  2
184  65  ×
185  43  RCL
186  00  00
187  95  =
188  42  STO
189  07  07
190  43  RCL
191  00  00
192  42  STO
193  02  02
194  00  0
195  42  STO
196  09  09
197  42  STO
198  05  05
199  76  LBL
200  42  STO
201  73  RC*
202  06  06
203  33  X²
204  44  SUM
205  09  09
206  73  RC*
207  06  06
208  65  ×
209  73  RC*
210  07  07
211  95  =
212  22  INV
213  44  SUM
214  05  05
215  01  1
216  44  SUM
217  06  06
218  44  SUM
219  07  07
220  97  DSZ
221  02  02
222  42  STO
223  43  RCL
224  05  05
225  22  INV
226  49  PRD
227  09  09
228  43  RCL
229  00  00
230  42  STO
231  02  02
232  43  RCL
233  01  01
234  85  +
235  43  RCL
236  00  00
237  33  X²
238  95  =
239  42  STO
240  07  07
241  85  +
242  43  RCL
243  00  00
244  95  =
245  42  STO
246  06  06
247  85  +
248  43  RCL
249  00  00
250  95  =
251  42  STO
252  08  08
253  76  LBL
254  44  SUM
255  73  RC*
256  07  07
257  65  ×
258  43  RCL
259  09  09
260  95  =
261  74  SM*
262  06  06
263  73  RC*
264  08  08
265  65  ×
266  43  RCL
267  09  09
268  95  =
269  74  SM*
270  07  07
271  01  1
272  44  SUM
273  06  06
274  44  SUM
275  07  07
276  44  SUM
277  08  08
278  97  DSZ
279  02  02
280  44  SUM
281  43  RCL
282  00  00
283  42  STO
284  02  02
285  33  X²
286  85  +
287  43  RCL
288  01  01
289  95  =
290  42  STO
291  03  03
292  00  0
293  42  STO
294  05  05
295  76  LBL
296  45  YX
297  73  RC*
298  03  03
299  33  X²
300  44  SUM
301  05  05
302  01  1
303  44  SUM
304  03  03
305  97  DSZ
306  02  02
307  45  YX
308  43  RCL
309  05  05
310  34  √X
311  77  GE
312  13  C
313  43  RCL
314  00  00
315  42  STO
316  02  02
317  33  X²
318  85  +
319  43  RCL
320  01  01
321  85  +
322  43  RCL
323  00  00
324  95  =
325  42  STO
326  03  03
327  76  LBL
328  52  EE
329  73  RC*
330  03  03
331  91  R/S
332  01  1
333  44  SUM
334  03  03
335  97  DSZ
336  02  02
337  52  EE
338  91  R/S
```

2.10 Lineare Optimierung

Das Programm berechnet die Lösung eines linearen Programms in Normalform

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1 & \geq 0 \\ \mathbf{y}_2 = B\,\mathbf{y}_1 + \mathbf{b} & \geq 0 \\ z = \mathbf{c}^T \mathbf{y}_1 + c & \rightarrow \max \end{aligned}$$

nach dem Simplexverfahren. Dabei sind $\mathbf{y}_1$ und $\mathbf{c}$ m-Spalten, $\mathbf{y}_2$ und $\mathbf{b}$ n-Spalten und B ist eine n,m-Matrix. Das lineare Programm wird spaltenweise als eine Matrix L der folgenden Form eingegeben:



Das Programm wurde in drei Teile zerlegt. Es gestattet die Lösung solcher Optimierungsprobleme, deren Formate in der folgenden Tabelle mit „+" gekennzeichnet sind.

m \ n	2	3	4	5	6	7	8	9
2	+	+	+	+	+	+	+	+
3	+	+	+	+	+	+		
4	+	+	+	+	+			
5	+	+	+	+				
6	+	+	+					
7	+	+						
8	+							
9	+							

Programminstruktionen

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
1	„Teil 1" einlesen (Block 1)			1
2	Programmbeginn „Teil 1"		A	1
3	Eingabe von n und m	n	R/S	n
		m	R/S	m
4	Eingabe der Nummer des ersten zu	k	R/S	
	belegenden Speicherplatzes $k \geq 13$			1
5	Eingabe der Matrix $L = \left[\begin{array}{c\|c} B & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{c}^T & c \end{array}\right]$ spaltenweise	b_{11}	R/S	2
		⋮	⋮	⋮
		b_{n1}	R/S	n+1
		c_1	R/S	n+2
		b_{12}	R/S	n+3
		⋮	⋮	⋮
		b_{nm}	R/S	m(n+1)
		c_m	R/S	m(n+1)+1
		b_1	R/S	m(n+1)+2
		⋮	⋮	⋮
		b_n	R/S	(m+1) (n+1)
		c	R/S	0
6	„Teil 2" einlesen (Block 1, 2)			2
7	Programmbeginn „Teil 2"		B	
				0
8	„Teil 3" einlesen (Block 1)			1
9	Ausgabe der primalen Lösung y_1		C	
10	Ergebnisanzeige			z_{max}
			R/S	y_1
			⋮	⋮
			R/S	y_m

Registerinhalte

$R_{00}, \ldots, R_{12}$: Programmzeiger

$R_k, \ldots, R_{k+m+n-1}$: Zeilen- und Spaltenindizes

$R_{k+m+n}, \ldots, R_{k+2m+2n+mn}$: Koeffizienten von $L = \left[\begin{array}{c|c} B & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{c}^T & c \end{array}\right]$

Bemerkungen

1. Ist man nicht an der Lösung des primalen, sondern des dualen linearen Programms

$$\begin{aligned}
&\mathbf{v}_2 && \leq \mathbf{0}\\
&\mathbf{v}_1 = -\mathbf{B}^T\mathbf{v}_2 + \mathbf{c} && \leq \mathbf{0}\\
&w = -\mathbf{b}^T\mathbf{v}_2 + c && \to \min
\end{aligned}$$

interessiert, so wird Schritt 9 der Programminstruktionen ersetzt durch Schritt 9a

9a	Ausgabe der dualen Lösung $\mathbf{v}_2$		D	

Auch in diesem Fall wird die Matrix $L = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B} & \mathbf{b} \\ \hline \mathbf{c}^T & c \end{array}\right]$ eingegeben.

2. Existiert keine optimale Lösung, weil die Menge der zulässigen Lösungen unbeschränkt ist, hält das Programm und der Rechner zeigt dies durch eine blinkende Anzeige an.

Beispiel

Gegeben ist das lineare Optimierungsproblem

$$\begin{aligned}
&y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0\\
&\;\; y_1 + \;\; y_2 \leq 10\\
&3y_1 + 2y_2 \leq 24\\
&\;\; y_1 \qquad\; \leq \;\; 6\\
&2y_1 + \;\; y_2 \to \max
\end{aligned}$$

Die Normalform lautet

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}, \qquad \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ 24 \\ 6 \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}, \quad z = 2y_1 + y_2 + 0 \to \max ;$$

$$\text{also} \quad L = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 10 \\ -3 & -2 & 24 \\ -1 & 0 & 6 \\ \hline 2 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Anmerkungen	Eingabe	Taste	Anzeige
„Teil 1" einlesen (Block 1)			1
Programmbeginn „Teil 1"		A	1
Eingabe von: n	3	R/S	3
m	2	R/S	2
k	13	R/S	
			1

Anmerkungen	Eingabe	Taste	Anzeige
b_{11}	–1	R/S	2
b_{21}	–3	R/S	3
b_{31}	–1	R/S	4
c_1	2	R/S	5
b_{12}	–1	R/S	6
b_{22}	–2	R/S	7
b_{32}	0	R/S	8
c_2	1	R/S	9
b_1	10	R/S	10
b_2	24	R/S	11
b_3	6	R/S	12
c	0	R/S	0
„Teil 2" einlesen (Block 1, 2)			2
Programmbeginn „Teil 2"		B	
			0
„Teil 3" einlesen (Block 1)			1
Ausgabe der primalen Lösung		C	
Anzeige von: z_{max}			15
y_1		R/S	6
y_2		R/S	3

Programm 2.10	**Lineare Optimierung**

Teil 1

```
000  76 LBL
001  11  A
002  91 R/S
003  42 STO
004  00  00
005  42 STO
006  03  03
007  91 R/S
008  42 STO
009  01  01
010  42 STO
011  04  04
012  91 R/S
013  42 STO
014  02  02
015  42 STO
016  05  05
017  01  1
018  42 STO
019  06  06
020  76 LBL
021  22 INV
022  43 RCL
023  06  06
024  72 ST*
025  05  05
026  01  1
027  44 SUM
028  05  05
029  44 SUM
030  06  06
031  97 DSZ
032  04  04
033  22 INV
034  01  1
035  42 STO
036  06  06
037  76 LBL
038  23 LNX
039  43 RCL
040  06  06
041  94 +/-
042  72 ST*
043  05  05
044  01  1
045  44 SUM
046  05  05
047  44 SUM
048  06  06
049  97 DSZ
050  03  03
051  23 LNX
052  01  1
053  42 STO
054  03  03
055  00  0
056  53  (
057  43 RCL
058  00  00
059  85  +
060  01  1
061  54  )
062  65  ×
063  53  (
064  43 RCL
065  01  01
066  85  +
067  01  1
068  54  )
069  95  =
070  42 STO
071  04  04
072  76 LBL
073  24 CE
074  43 RCL
075  03  03
076  91 R/S
077  72 ST*
078  05  05
079  01  1
080  44 SUM
081  03  03
082  44 SUM
083  05  05
084  97 DSZ
085  04  04
086  24 CE
087  25 CLR
088  91 R/S
```

Teil 2

```
000  76  LBL
001  12   B
002  43  RCL
003  01   01
004  42  STO
005  04   04
006  85   +
007  02   2
008  65   ×
009  43  RCL
010  00   00
011  85   +
012  43  RCL
013  02   02
014  95   =
015  42  STO
016  03   03
017  29  CP
018  01   1
019  42  STO
020  05   05
021  76  LBL
022  25  CLR
023  73  RC*
024  03   03
025  94  +/-
026  22  INV
027  77   GE
028  32  X:T
029  01   1
030  44  SUM
031  05   05
032  85   +
033  43  RCL
034  00   00
035  95   =
036  44  SUM
037  03   03
038  97  DSZ
039  04   04
040  25  CLR
041  25  CLR
042  91  R/S
043  76  LBL
044  32  X:T
045  43  RCL
046  02   02
047  85   +
048  43  RCL
049  00   00
050  85   +
051  43  RCL
052  00   00
053  65   ×
054  43  RCL
055  01   01
056  85   +
057  02   2
058  65   ×
059  43  RCL
060  01   01
061  95   =
062  42  STO
063  03   03
064  43  RCL
065  02   02
066  85   +
067  43  RCL
068  01   01
069  85   +
070  43  RCL
071  00   00
072  65   ×
073  43  RCL
074  05   05
075  85   +
076  43  RCL
077  05   05
078  75   -
079  01   1
080  95   =
081  42  STO
082  04   04
083  01   1
084  42  STO
085  09   09
086  43  RCL
087  00   00
088  42  STO
089  07   07
090  00   0
091  42  STO
092  08   08
093  86  STF
094  06   06
095  76  LBL
096  33  X²
097  73  RC*
098  04   04
099  22  INV
100  77   GE
101  34  ΓX
102  61  GTO
103  35  1/X
104  76  LBL
105  34  ΓX
106  73  RC*
107  03   03
108  55   ÷
109  73  RC*
110  04   04
111  95   =
112  94  +/-
113  42  STO
114  10   10
115  22  INV
116  87  IFF
117  06   06
118  42  STO
119  42  STO
120  08   08
121  22  INV
122  86  STF
123  06   06
124  43  RCL
125  09   09
126  42  STO
127  06   06
128  61  GTO
129  35  1/X
130  76  LBL
131  42  STO
132  43  RCL
133  10   10
134  75   -
135  43  RCL
136  08   08
137  95   =
138  77   GE
139  35  1/X
140  43  RCL
141  10   10
142  42  STO
143  08   08
144  43  RCL
145  09   09
146  42  STO
147  06   06
148  76  LBL
149  35  1/X
150  01   1
151  44  SUM
152  03   03
153  44  SUM
154  04   04
155  44  SUM
156  09   09
157  97  DSZ
158  07   07
159  33  X²
160  22  INV
161  87  IFF
162  06   06
163  43  RCL
164  61  GTO
165  16  A'
166  76  LBL
167  43  RCL
168  43  RCL
169  02   02
170  75   -
171  01   1
172  85   +
173  43  RCL
174  05   05
175  95   =
176  42  STO
177  03   03
178  75   -
179  43  RCL
180  05   05
181  85   +
182  43  RCL
183  01   01
184  85   +
185  43  RCL
186  06   06
187  95   =
188  42  STO
189  04   04
190  73  RC*
191  03   03
192  63  EX*
193  04   04
194  63  EX*
195  03   03
196  43  RCL
197  00   00
198  85   +
199  01   1
200  95   =
201  42  STO
202  03   03
203  43  RCL
204  02   02
205  85   +
206  43  RCL
207  01   01
208  85   +
209  43  RCL
210  05   05
211  65   ×
212  43  RCL
213  00   00
214  85   +
215  43  RCL
216  05   05
217  75   -
218  01   1
219  95   =
220  42  STO
221  09   09
222  85   +
223  43  RCL
224  06   06
225  75   -
226  01   1
227  95   =
228  42  STO
229  07   07
230  73  RC*
231  07   07
```

232	42	STO
233	07	07
234	01	1
235	75	-
236	43	RCL
237	06	06
238	95	=
239	42	STO
240	11	11
241	76	LBL
242	44	SUM
243	43	RCL
244	11	11
245	67	EQ
246	45	Y^x
247	43	RCL
248	01	01
249	85	+
250	01	1
251	95	=
252	42	STO
253	04	04
254	75	-
255	02	2
256	85	+
257	43	RCL
258	02	02
259	85	+
260	43	RCL
261	00	00
262	85	+
263	43	RCL
264	06	06
265	95	=
266	42	STO
267	10	10
268	43	RCL
269	02	02
270	85	+
271	43	RCL
272	01	01
273	85	+
274	02	2
275	65	×
276	43	RCL
277	00	00
278	75	-
279	43	RCL
280	03	03
281	85	+
282	01	1
283	95	=
284	42	STO
285	08	08
286	01	1
287	75	-
288	43	RCL
289	05	05
290	95	=
291	42	STO
292	12	12
293	76	LBL
294	52	EE
295	43	RCL
296	12	12
297	67	EQ
298	53	(
299	73	RC*
300	09	09
301	65	×
302	73	RC*
303	10	10
304	55	÷
305	43	RCL
306	07	07
307	95	=
308	22	INV
309	74	SM*
310	08	08
311	76	LBL
312	53	(
313	43	RCL
314	00	00
315	85	+
316	01	1
317	95	=
318	44	SUM
319	08	08
320	44	SUM
321	10	10
322	01	1
323	44	SUM
324	12	12
325	97	DSZ
326	04	04
327	52	EE
328	76	LBL
329	45	Y^x
330	01	1
331	44	SUM
332	11	11
333	44	SUM
334	09	09
335	97	DSZ
336	03	03
337	44	SUM
338	43	RCL
339	01	01
340	85	+
341	01	1
342	95	=
343	42	STO
344	03	03
345	43	RCL
346	02	02
347	85	+
348	43	RCL
349	01	01
350	85	+
351	43	RCL
352	00	00
353	85	+
354	43	RCL
355	06	06
356	75	-
357	01	1
358	95	=
359	42	STO
360	10	10
361	01	1
362	75	-
363	43	RCL
364	05	05
365	95	=
366	42	STO
367	09	09
368	76	LBL
369	54	)
370	43	RCL
371	09	09
372	67	EQ
373	55	÷
374	43	RCL
375	07	07
376	94	+/-
377	22	INV
378	64	PD*
379	10	10
380	76	LBL
381	55	÷
382	01	1
383	44	SUM
384	09	09
385	85	+
386	43	RCL
387	00	00
388	95	=
389	44	SUM
390	10	10
391	97	DSZ
392	03	03
393	54	)
394	43	RCL
395	00	00
396	85	+
397	01	1
398	95	=
399	42	STO
400	03	03
401	43	RCL
402	02	02
403	85	+
404	43	RCL
405	01	01
406	85	+
407	43	RCL
408	00	00
409	65	×
410	43	RCL
411	05	05
412	85	+
413	43	RCL
414	05	05
415	75	-
416	01	1
417	95	=
418	42	STO
419	09	09
420	01	1
421	75	-
422	43	RCL
423	06	06
424	95	=
425	42	STO
426	10	10
427	76	LBL
428	61	GTO
429	43	RCL
430	10	10
431	67	EQ
432	65	×
433	43	RCL
434	07	07
435	22	INV
436	64	PD*
437	09	09
438	76	LBL
439	65	×
440	01	1
441	44	SUM
442	09	09
443	44	SUM
444	10	10
445	97	DSZ
446	03	03
447	61	GTO
448	43	RCL
449	02	02
450	85	+
451	43	RCL
452	01	01
453	85	+
454	43	RCL
455	00	00
456	65	×
457	43	RCL
458	05	05
459	85	+
460	43	RCL
461	05	05
462	75	-
463	02	2
464	85	+
465	43	RCL
466	06	06
467	95	=
468	42	STO
469	08	08
470	43	RCL
471	07	07
472	35	1/X
473	72	ST*
474	08	08
475	12	B
476	25	CLR

Teil 3

```
000  76  LBL
001  13   C
002  43  RCL
003  02   02
004  85   +
005  02   2
006  65   ×
007  53   (
008  43  RCL
009  01   01
010  85   +
011  43  RCL
012  00   00
013  54   )
014  85   +
015  43  RCL
016  00   00
017  65   ×
018  43  RCL
019  01   01
020  95   =
021  42  STO
022  07   07
023  73  RC*
024  07   07
025  91  R/S
026  43  RCL
027  01   01
028  42  STO
029  03   03
030  01   1
031  42  STO
032  04   04
033  76  LBL
034  71  SBR
035  43  RCL
036  02   02
037  85   +
038  43  RCL
039  01   01
040  95   =
041  42  STO
042  05   05
043  43  RCL
044  00   00
045  42  STO
046  06   06
047  76  LBL
048  75   -
049  73  RC*
050  05   05
051  75   -
052  43  RCL
053  04   04
054  95   =
055  67   EQ
056  81  RST
057  01   1
058  44  SUM
059  05   05
060  97  DSZ
061  06   06
062  75   -
063  00   0
064  91  R/S
065  61  GTO
066  85   +
067  76  LBL
068  81  RST
069  43  RCL
070  05   05
071  85   +
072  43  RCL
073  00   00
074  85   +
075  43  RCL
076  01   01
077  65   ×
078  43  RCL
079  00   00
080  85   +
081  43  RCL
082  01   01
083  95   =
084  42  STO
085  07   07
086  73  RC*
087  07   07
088  91  R/S
089  76  LBL
090  85   +
091  01   1
092  44  SUM
093  04   04
094  97  DSZ
095  03   03
096  71  SBR
097  91  R/S
098  76  LBL
099  14   D
100  43  RCL
101  02   02
102  85   +
103  02   2
104  65   ×
105  53   (
106  43  RCL
107  01   01
108  85   +
109  43  RCL
110  00   00
111  54   )
112  85   +
113  43  RCL
114  00   00
115  65   ×
116  43  RCL
117  01   01
118  95   =
119  42  STO
120  07   07
121  73  RC*
122  07   07
123  91  R/S
124  43  RCL
125  00   00
126  42  STO
127  03   03
128  01   1
129  42  STO
130  04   04
131  76  LBL
132  77   GE
133  43  RCL
134  02   02
135  42  STO
136  05   05
137  43  RCL
138  01   01
139  42  STO
140  06   06
141  76  LBL
142  78  Σ+
143  73  RC*
144  05   05
145  85   +
146  43  RCL
147  04   04
148  95   =
149  67   EQ
150  79   x̄
151  01   1
152  44  SUM
153  05   05
154  97  DSZ
155  06   06
156  78  Σ+
157  00   0
158  91  R/S
159  61  GTO
160  70  RAD
161  76  LBL
162  79   x̄
163  43  RCL
164  02   02
165  85   +
166  53   (
167  01   1
168  85   +
169  43  RCL
170  05   05
171  75   -
172  43  RCL
173  02   02
174  54   )
175  65   ×
176  53   (
177  43  RCL
178  00   00
179  85   +
180  01   1
181  54   )
182  85   +
183  43  RCL
184  00   00
185  85   +
186  43  RCL
187  01   01
188  75   -
189  01   1
190  95   =
191  42  STO
192  07   07
193  73  RC*
194  07   07
195  94  +/-
196  91  R/S
197  76  LBL
198  70  RAD
199  01   1
200  44  SUM
201  04   04
202  97  DSZ
203  03   03
204  77   GE
205  91  R/S
```

3 Iteration

3.1 Vektoriteration nach von Mises

Verfügt man über einen geeigneten Startvektor $\mathbf{y}_0$ und besitzt die n,n-Matrix A einen betragsgrößten Eigenwert λ_1, so konvergiert die Iterationsfolge

$$\mathbf{y}_i = A \cdot \mathbf{y}_{i-1} \cdot \frac{1}{\|\mathbf{y}_{i-1}\|_\infty}; \quad i = 1, 2, \ldots$$

gegen den Eigenvektor $\mathbf{x}_1$ von A und die Folge

$$\frac{\mathbf{y}_i^T \mathbf{y}_i}{\mathbf{y}_i^T \mathbf{y}_{i-1}}; \quad i = 1, 2, \ldots$$

gegen den Eigenwert λ_1. Das Programm bricht ab, wenn

$$\|\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_{i-1} \cdot \|\mathbf{y}_i\|_\infty\|_\infty < \epsilon$$

ist ($\epsilon > 0$ Toleranz) oder die vorzugebende Maximalzahl N von Iterationen durchgeführt worden ist. Es bearbeitet Matrizen bis zur Ordnung n = 6.

Programminstruktionen

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
1	Magnetkarte einlesen (Block 1, 2)			2
2	Programmbeginn		A	2
3	Eingabe der Nummer des ersten zu belegenden Speicherplatzes $k \geq 11$	k	R/S	1
4	Eingabe der Matrix $[A, y_0]$ spaltenweise	a_{11}	R/S	2
		a_{21}	R/S	3
		⋮	⋮	⋮
		a_{nn}	R/S	n^2+1
		$y_1^{(0)}$	R/S	n^2+2
		⋮	⋮	⋮
		$y_n^{(0)}$	R/S	n^2+n+1

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
5	Ende der Koeffizienteneingabe		B	0
6	Eingabe von n, k, ϵ, N	n	R/S	0
		k	R/S	0
		ϵ	R/S	0
		N	R/S	
7	Anzeige von λ_1 und $\mathbf{x}_1$			λ_1
			R/S	x_1
			⋮	⋮
			R/S	x_n

Registerinhalte

$R_{00}, \dots, R_{10}$: Programmzeiger

$R_k, \dots, R_{k+n^2-1}$: $a_{11}, \dots, a_{nn}$

$R_{k+n^2}, \dots, R_{k+n^2+n-1}$: $y_1^{(i)}, \dots, y_n^{(i)}$

$R_{k+n^2+n}, \dots, R_{k+n^2+2n-1}$: $y_1^{(i-1)}, \dots, y_n^{(i-1)}$

Beispiel

Mit höchstens N = 5 Iterationsschritten, der Toleranz $\epsilon = 0.1$ und dem Startvektor $\mathbf{y}_0 = [1, 0, 0]^T$ soll der betragsgrößte Eigenwert λ_1 und der zugehörige Eigenvektor $\mathbf{x}_1$ der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

näherungsweise bestimmt werden.

Anmerkungen	Eingabe	Taste	Anzeige
Magnetkarte einlesen (Block 1, 2)			2
Programmbeginn		A	2
Eingabe von: k	11	R/S	1
a_{11}	3	R/S	2
a_{21}	2	R/S	3
a_{31}	0	R/S	4
a_{12}	2	R/S	5

Anmerkungen		Eingabe	Taste	Anzeige
	a_{22}	6	R/S	6
	a_{32}	0	R/S	7
	a_{13}	−1	R/S	8
	a_{23}	−2	R/S	9
	a_{33}	2	R/S	10
	$y_1^{(0)}$	1	R/S	11
	$y_2^{(0)}$	0	R/S	12
	$y_3^{(0)}$	0	R/S	13
Ende der Koeffizienteneingabe			B	0
Eingabe von:	n	3	R/S	0
	k	11	R/S	0
	ϵ	0.1	R/S	0
	N	5	R/S	
Anzeige von:	λ_1			6.999746256
	x_1		R/S	.5047690015
	x_2		R/S	1
	x_3		R/S	0

Die exakte Lösung ist $\lambda_1 = 7$ und $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Programm 3.1	**Vektoriteration nach von Mises**

```
000  76  LBL
001  11  A
002  91  R/S
003  42  STO
004  00  00
005  01  1
006  42  STO
007  01  01
008  43  RCL
009  01  01
010  91  R/S
011  72  ST*
012  00  00
013  01  1
014  44  SUM
015  00  00
016  44  SUM
017  01  01
018  61  GTO
019  00  00
020  08  08
021  76  LBL
022  12  B
023  25  CLR
024  91  R/S
025  42  STO
026  00  00
027  75  -
028  01  1
029  95  =
030  42  STO
031  09  09
032  25  CLR
033  91  R/S
034  42  STO
035  01  01
036  25  CLR
037  91  R/S
038  42  STO
039  06  06
040  25  CLR
041  91  R/S
042  42  STO
043  05  05
044  43  RCL
045  00  00
046  33  X²
047  85  +
048  43  RCL
049  01  01
050  95  =
051  42  STO
052  02  02
053  73  RC*
054  02  02
055  50  I×I
056  32  X:T
057  73  RC*
058  02  02
059  42  STO
060  10  10
061  76  LBL
062  22  INV
063  01  1
064  44  SUM
065  02  02
066  73  RC*
067  02  02
068  50  I×I
069  22  INV
070  77  GE
071  23  LNX
072  67  EQ
073  23  LNX
074  32  X:T
075  73  RC*
```

```
076  02  02
077  42  STO
078  10  10
079  76  LBL
080  23  LNX
081  97  DSZ
082  09  09
083  22  INV
084  76  LBL
085  34  ΓX
086  43  RCL
087  00  00
088  42  STO
089  09  09
090  33  X²
091  85  +
092  43  RCL
093  01  01
094  95  =
095  42  STO
096  02  02
097  85  +
098  43  RCL
099  00  00
100  95  =
101  42  STO
102  03  03
103  76  LBL
104  15  E
105  73  RC*
106  02  02
107  55  ÷
108  43  RCL
109  10  10
110  95  =
111  72  ST*
112  03  03
113  00  0
114  72  ST*
115  02  02
116  01  1
117  44  SUM
118  02  02
119  44  SUM
120  03  03
121  97  DSZ
122  09  09
123  15  E
124  43  RCL
125  01  01
126  42  STO
127  02  02
128  85  +
129  43  RCL
130  00  00
131  33  X²
132  95  =
133  42  STO
134  04  04
135  85  +
136  43  RCL
137  00  00
138  95  =
139  42  STO
140  03  03
141  43  RCL
142  00  00
143  42  STO
144  08  08
145  76  LBL
146  10  E'
147  43  RCL
148  00  00
149  42  STO
150  09  09
151  76  LBL
152  19  D'
153  73  RC*
154  02  02
155  65  ×
156  73  RC*
157  03  03
158  95  =
159  74  SM*
160  04  04
161  01  1
162  44  SUM
163  03  03
164  43  RCL
165  00  00
166  44  SUM
167  02  02
168  97  DSZ
169  09  09
170  19  D'
171  43  RCL
172  00  00
173  22  INV
174  44  SUM
175  03  03
176  33  X²
177  75  -
178  01  1
179  95  =
180  22  INV
181  44  SUM
182  02  02
183  01  1
184  44  SUM
185  04  04
186  97  DSZ
187  08  08
188  10  E'
189  43  RCL
190  00  00
191  33  X²
192  85  +
193  43  RCL
194  01  01
195  95  =
196  42  STO
197  02  02
198  43  RCL
199  00  00
200  75  -
201  01  1
202  95  =
203  42  STO
204  09  09
205  73  RC*
206  02  02
207  50  I×I
208  32  X:T
209  73  RC*
210  02  02
211  42  STO
212  10  10
213  76  LBL
214  18  C'
215  01  1
216  44  SUM
217  02  02
218  73  RC*
219  02  02
220  50  I×I
221  22  INV
222  77  GE
223  24  CE
224  67  EQ
225  24  CE
226  32  X:T
227  73  RC*
228  02  02
229  42  STO
230  10  10
231  76  LBL
232  24  CE
233  97  DSZ
234  09  09
235  18  C'
236  43  RCL
237  00  00
238  42  STO
239  09  09
240  33  X²
241  85  +
242  43  RCL
243  01  01
244  95  =
245  42  STO
246  02  02
247  85  +
248  43  RCL
249  00  00
250  95  =
251  42  STO
252  03  03
253  43  RCL
254  06  06
255  32  X:T
256  76  LBL
257  17  B'
258  53  (
259  73  RC*
260  02  02
261  75  -
262  73  RC*
263  03  03
264  65  ×
265  43  RCL
266  10  10
267  54  )
268  50  I×I
269  77  GE
270  25  CLR
271  01  1
272  44  SUM
273  02  02
274  44  SUM
275  03  03
276  97  DSZ
277  09  09
278  17  B'
279  61  GTO
280  13  C
281  76  LBL
282  25  CLR
283  97  DSZ
284  05  05
285  34  ΓX
286  76  LBL
287  13  C
288  43  RCL
289  00  00
290  42  STO
291  09  09
292  33  X²
293  85  +
294  43  RCL
295  01  01
296  95  =
297  42  STO
298  02  02
299  85  +
300  43  RCL
301  00  00
302  95  =
303  42  STO
304  03  03
305  00  0
306  42  STO
307  08  08
308  42  STO
309  07  07
310  76  LBL
311  16  A'
312  73  RC*
313  02  02
314  33  X²
315  44  SUM
316  08  08
317  73  RC*
318  02  02
319  65  ×
320  73  RC*
321  03  03
322  95  =
323  44  SUM
```

```
324  07  07      335  97 DSZ      346  43 RCL      357  33 X²
325  43 RCL      336  09  09      347  00  00      358  73 RC*
326  10  10      337  16 A'       348  42 STO      359  02  02
327  22 INV      338  43 RCL      349  09  09      360  91 R/S
328  64 PD*      339  08  08      350  22 INV      361  01  1
329  02  02      340  55  ÷       351  44 SUM      362  44 SUM
330  01  1       341  43 RCL      352  02  02      363  02  02
331  44 SUM      342  07  07      353  43 RCL      364  97 DSZ
332  02  02      343  95  =       354  10  10      365  09  09
333  44 SUM      344  42 STO      355  91 R/S      366  33 X²
334  03  03      345  10  10      356  76 LBL      367  91 R/S
```

3.2 Inverse Iteration

Das Programm berechnet den betragskleinsten Eigenwert λ_n der n,n-Matrix A als betragsgrößten Eigenwert λ_n^{-1} von A^{-1}. Dabei wird die Iterationsvorschrift

$$\mathbf{y}_i = A^{-1}\mathbf{y}_{i-1}$$

ersetzt durch das Lösen des linearen Gleichungssystems

$$LR\mathbf{y}_i = \mathbf{y}_{i-1} ,$$

wobei die LR-Zerlegung von A vorher durch das Programm 2.4 „Die LR-Zerlegung mit Pivotsuche" bereitgestellt wird. Das Programm bricht die Iteration ab, wenn der Wert

$$\|\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_{i-1}\|\mathbf{y}_i\|_\infty\|_\infty$$

eine vorzugebende Toleranz $\epsilon > 0$ unterschreitet oder die Höchstzahl N von Schritten durchgeführt wurde. Es ist in drei Teile zerlegt und auf Matrizen bis zur Ordnung $n = 5$ anwendbar. Damit die Speicherbelegung übereinstimmt, muß beim Programm „Die LR-Zerlegung mit Pivotsuche" die Nummer des ersten zu belegenden Speicherplatzes $k = 14$ gewählt werden.

Programminstruktionen

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
1	„LR-Zerlegung mit Pivotsuche – Teil 1" einlesen (Block 1)			1
2	Programmbeginn „Teil 1"		A	1
3	Eingabe der Nummer des ersten zu belegenden Speicherplatzes $k = 14$	14	R/S	1
4	Eingabe von A spaltenweise	a_{11}	R/S	2
		a_{21}	R/S	3
		⋮	⋮	⋮
		a_{nn}	R/S	n^2+1

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
5	Ende der Koeffizienteneingabe		B	n^2+1
6	Eingabe von n und k	n	R/S	n
		k	R/S	
				0
7	„LR-Zerlegung mit Pivotsuche – Teil 2" einlesen (Block 1, 2)			2
8	Programmbeginn „Teil 2"		C	
				0
9	„Inverse Iteration – Teil 1" einlesen (Block 1)			1
10	Programmbeginn „Teil 1"		A	1
11	Eingabe des Startvektors y_0	$y_1^{(0)}$	R/S	2
		⋮	⋮	⋮
		$y_n^{(0)}$	R/S	n+1
12	Ende der Koeffizienteneingabe		B	0
13	Eingabe von N und ϵ	N	R/S	N
		ϵ	R/S	
				0
14	„Inverse Iteration – Teil 2" einlesen (Block 1, 2)			2
15	Programmbeginn „Teil 2"		C	
				0
16	„Inverse Iteration – Teil 3" einlesen (Block 1)			1
17	Programmbeginn „Teil 3"		D	
18	Anzeige des Eigenwerts λ_n und des Eigenvektors $\mathbf{x}$			λ_n
			R/S	x_1
			⋮	⋮
			R/S	x_n

Registerinhalte

$R_{00}, \ldots, R_{13}$: Programmzeiger
$R_{14}, \ldots, R_{n^2+13}$: Koeffizienten der LR-Zerlegung von A
$R_{n^2+14}, \ldots, R_{n^2+n+13}$: $y_1^{(i)}, \ldots, y_n^{(i)}$
$R_{n^2+n+14}, \ldots, R_{n^2+2n+13}$: Zeilenindizes
$R_{n^2+2n+14}, \ldots, R_{n^2+3n+13}$: $y_1^{(i-1)}, \ldots, y_n^{(i-1)}$
$R_{n^2+3n+14}, \ldots, R_{n^2+4n+13}$: Zeilenindizes

Beispiel

Gesucht ist der betragskleinste Eigenwert λ_3 der Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ und der zugehörige Eigenvektor **x**. Dabei sei $y_0 = [1, 0, 0]^T$, N = 10 und $\epsilon = 0.0001$.

Anmerkungen	Eingabe	Taste	Anzeige
„LR-Zerlegung mit Pivotsuche – Teil 1" einlesen (Block 1)			1
Programmbeginn „Teil 1"		A	1
Eingabe von: k	14	R/S	1
a_{11}	1	R/S	2
a_{21}	0	R/S	3
a_{31}	1	R/S	4
a_{12}	0	R/S	5
a_{22}	4	R/S	6
a_{32}	2	R/S	7
a_{13}	1	R/S	8
a_{23}	2	R/S	9
a_{33}	3	R/S	10
Ende der Koeffizienteneingabe		B	10
Eingabe von: n	3	R/S	3
k	14	R/S	
			0
„LR-Zerlegung mit Pivotsuche – Teil 2" einlesen (Block 1, 2)			2
Programmbeginn „Teil 2"		C	
			0
„Inverse Iteration – Teil 1" einlesen (Block 1)			1
Programmbeginn „Teil 1"		A	1
Eingabe von: $y_1^{(0)}$	1	R/S	2
$y_2^{(0)}$	0	R/S	3
$y_3^{(0)}$	0	R/S	4
Ende der Koeffizienteneingabe		B	0
Eingabe von: N	10	R/S	10
ϵ	0.0001	R/S	
			0

Anmerkungen	Eingabe	Taste	Anzeige
„Inverse Iteration – Teil 2" einlesen (Block 1, 2)			2
Programmbeginn „Teil 2"		C	
			0
„Inverse Iteration – Teil 3" einlesen (Block 1)			1
Programmbeginn „Teil 3"		D	
Anzeige von: λ_3			.354248689
x_1		R/S	1
x_2		R/S	.3542448811
x_3		R/S	–.6457466823

Programm 3.2	**Inverse Iteration**

Teil 1

```
000  76 LBL
001  11  A
002  01  1
003  04  4
004  42 STO
005  01  01
006  85  +
007  43 RCL
008  00  00
009  33 X²
010  95  =
011  42 STO
012  02  02
013  01  1
014  42 STO
015  03  03
016  76 LBL
017  22 INV
018  43 RCL
019  03  03
020  91 R/S
021  72 ST*
022  02  02
023  01  1
024  44 SUM
025  02  02
026  44 SUM
027  03  03
028  61 GTO
029  22 INV
030  76 LBL
031  12  B
032  25 CLR
033  91 R/S
034  42 STO
035  02  02
036  91 R/S
037  42 STO
038  03  03
039  43 RCL
040  00  00
041  75  -
042  01  1
043  95  =
044  42 STO
045  04  04
046  43 RCL
047  01  01
048  85  +
049  43 RCL
050  00  00
051  33 X²
052  95  =
053  42 STO
054  05  05
055  73 RC*
056  05  05
057  50 I×I
058  42 STO
059  06  06
060  32 X:T
061  76 LBL
062  23 LNX
063  01  1
064  44 SUM
065  05  05
066  73 RC*
067  05  05
068  50 I×I
069  22 INV
070  77  GE
071  24 CE
072  67  EQ
073  24 CE
074  42 STO
075  06  06
076  32 X:T
077  76 LBL
078  24 CE
079  97 DSZ
080  04  04
081  23 LNX
082  25 CLR
083  91 R/S
```

Teil 2

```
000  76 LBL
001  13  C
002  29 CP
003  43 RCL
004  00  00
005  42 STO
006  04  04
007  71 SBR
008  16  A'
009  42 STO
010  05  05
011  85  +
012  02  2
013  65  ×
014  43 RCL
015  00  00
016  95  =
017  42 STO
018  07  07
019  76 LBL
020  33 X²
021  73 RC*
022  05  05
023  55  ÷
024  43 RCL
025  06  06
026  95  =
027  72 ST*
028  05  05
029  72 ST*
030  07  07
031  01  1
```

```
032  44  SUM
033  05   05
034  44  SUM
035  07   07
036  97  DSZ
037  04   04
038  33  X²
039  01   1
040  42  STO
041  04   04
042  43  RCL
043  00   00
044  42  STO
045  05   05
046  65   ×
047  03   3
048  85   +
049  71  SBR
050  16  A'
051  95   =
052  42  STO
053  07   07
054  76  LBL
055  22  INV
056  43  RCL
057  04   04
058  72  ST*
059  07   07
060  01   1
061  44  SUM
062  04   04
063  44  SUM
064  07   07
065  97  DSZ
066  05   05
067  22  INV
068  71  SBR
069  16  A'
070  42  STO
071  07   07
072  85   +
073  43  RCL
074  00   00
075  95   =
076  42  STO
077  04   04
078  85   +
079  02   2
080  65   ×
081  43  RCL
082  00   00
083  95   =
084  42  STO
085  06   06
086  43  RCL
087  00   00
088  75   -
089  01   1
090  95   =
091  42  STO
092  08   08
093  76  LBL
094  23  LNX
095  71  SBR
096  16  A'
097  42  STO
098  10   10
099  85   +
100  03   3
101  65   ×
102  43  RCL
103  00   00
104  95   =
105  42  STO
106  05   05
107  43  RCL
108  00   00
109  42  STO
110  09   09
111  76  LBL
112  24  CE
113  73  RC*
114  04   04
115  75   -
116  73  RC*
117  05   05
118  95   =
119  67   EQ
120  25  CLR
121  01   1
122  44  SUM
123  05   05
124  44  SUM
125  10   10
126  97  DSZ
127  09   09
128  24  CE
129  76  LBL
130  25  CLR
131  43  RCL
132  07   07
133  75   -
134  43  RCL
135  10   10
136  95   =
137  67   EQ
138  32  X:T
139  73  RC*
140  07   07
141  63  EX*
142  10   10
143  63  EX*
144  07   07
145  73  RC*
146  06   06
147  63  EX*
148  05   05
149  63  EX*
150  06   06
151  76  LBL
152  32  X:T
153  01   1
154  44  SUM
155  04   04
156  44  SUM
157  06   06
158  44  SUM
159  07   07
160  97  DSZ
161  08   08
162  23  LNX
163  71  SBR
164  16  A'
165  42  STO
166  07   07
167  85   +
168  01   1
169  95   =
170  42  STO
171  05   05
172  43  RCL
173  01   01
174  85   +
175  01   1
176  95   =
177  42  STO
178  04   04
179  43  RCL
180  00   00
181  75   -
182  01   1
183  95   =
184  42  STO
185  09   09
186  76  LBL
187  35  1/X
188  43  RCL
189  00   00
190  75   -
191  43  RCL
192  09   09
193  95   =
194  42  STO
195  08   08
196  76  LBL
197  42  STO
198  73  RC*
199  04   04
200  65   ×
201  73  RC*
202  07   07
203  95   =
204  22  INV
205  74  SM*
206  05   05
207  43  RCL
208  00   00
209  44  SUM
210  04   04
211  01   1
212  44  SUM
213  07   07
214  97  DSZ
215  08   08
216  42  STO
217  01   1
218  44  SUM
219  05   05
220  71  SBR
221  16  A'
222  42  STO
223  07   07
224  43  RCL
225  01   01
226  85   +
227  43  RCL
228  00   00
229  75   -
230  43  RCL
231  09   09
232  85   +
233  01   1
234  95   =
235  42  STO
236  04   04
237  97  DSZ
238  09   09
239  35  1/X
240  16  A'
241  85   +
242  43  RCL
243  00   00
244  75   -
245  01   1
246  95   =
247  42  STO
248  10   10
249  71  SBR
250  16  A'
251  75   -
252  01   1
253  95   =
254  42  STO
255  07   07
256  73  RC*
257  07   07
258  22  INV
259  64  PD*
260  10   10
261  01   1
262  22  INV
263  44  SUM
264  10   10
265  43  RCL
266  00   00
267  85   +
268  01   1
269  95   =
270  22  INV
271  44  SUM
272  07   07
273  43  RCL
274  10   10
275  75   -
276  43  RCL
277  00   00
278  95   =
279  42  STO
```

280	04	04
281	43	RCL
282	10	10
283	85	+
284	01	1
285	95	=
286	42	STO
287	05	05
288	43	RCL
289	00	00
290	75	-
291	01	1
292	95	=
293	42	STO
294	09	09
295	76	LBL
296	43	RCL
297	43	RCL
298	00	00
299	75	-
300	43	RCL
301	09	09
302	95	=
303	42	STO
304	08	08
305	76	LBL
306	44	SUM
307	73	RC*
308	04	04
309	65	×
310	73	RC*
311	05	05
312	95	=
313	22	INV
314	74	SM*
315	10	10
316	43	RCL
317	00	00
318	22	INV
319	44	SUM
320	04	04
321	01	1
322	22	INV
323	44	SUM
324	05	05
325	97	DSZ
326	08	08
327	44	SUM
328	73	RC*
329	07	07
330	22	INV
331	64	PD*
332	10	10
333	43	RCL
334	00	00
335	85	+
336	01	1
337	95	=
338	22	INV
339	44	SUM
340	07	07
341	01	1
342	22	INV
343	44	SUM
344	10	10
345	43	RCL
346	10	10
347	75	-
348	43	RCL
349	00	00
350	95	=
351	42	STO
352	04	04
353	71	SBR
354	16	A'
355	85	+
356	43	RCL
357	00	00
358	75	-
359	01	1
360	95	=
361	42	STO
362	05	05
363	97	DSZ
364	09	09
365	43	RCL
366	71	SBR
367	16	A'
368	42	STO
369	10	10
370	43	RCL
371	00	00
372	75	-
373	01	1
374	95	=
375	42	STO
376	09	09
377	73	RC*
378	10	10
379	50	I×I
380	42	STO
381	06	06
382	32	X:T
383	76	LBL
384	45	Y^x
385	01	1
386	44	SUM
387	10	10
388	73	RC*
389	10	10
390	50	I×I
391	22	INV
392	77	GE
393	52	EE
394	67	EQ
395	52	EE
396	42	STO
397	06	06
398	32	X:T
399	76	LBL
400	52	EE
401	97	DSZ
402	09	09
403	45	Y^x
404	43	RCL
405	00	00
406	42	STO
407	09	09
408	71	SBR
409	16	A'
410	42	STO
411	10	10
412	85	+
413	02	2
414	65	×
415	43	RCL
416	00	00
417	95	=
418	42	STO
419	07	07
420	43	RCL
421	03	03
422	32	X:T
423	76	LBL
424	53	(
425	53	(
426	73	RC*
427	10	10
428	50	I×I
429	75	-
430	73	RC*
431	07	07
432	50	I×I
433	65	×
434	43	RCL
435	06	06
436	54	)
437	50	I×I
438	77	GE
439	54	)
440	01	1
441	44	SUM
442	10	10
443	44	SUM
444	07	07
445	97	DSZ
446	09	09
447	53	(
448	61	GTO
449	55	÷
450	76	LBL
451	54	)
452	97	DSZ
453	02	02
454	13	C
455	76	LBL
456	55	÷
457	25	CLR
458	91	R/S
459	76	LBL
460	16	A'
461	53	(
462	43	RCL
463	00	00
464	33	X^2
465	85	+
466	43	RCL
467	01	01
468	54	)
469	92	RTN

Teil 3

000	76	LBL
001	14	D
002	43	RCL
003	00	00
004	42	STO
005	09	09
006	33	X^2
007	85	+
008	43	RCL
009	01	01
010	95	=
011	42	STO
012	10	10
013	85	+
014	02	2
015	65	×
016	43	RCL
017	00	00
018	95	=
019	42	STO
020	07	07
021	00	0
022	42	STO
023	08	08
024	42	STO
025	05	05
026	76	LBL
027	65	×
028	73	RC*
029	10	10
030	33	X^2
031	44	SUM

```
032  08  08
033  73  RC*
034  10  10
035  65  ×
036  73  RC*
037  07  07
038  95  =
039  44  SUM
040  05  05
041  43  RCL
042  06  06
043  22  INV
044  64  PD*
045  10  10
046  01  1
047  44  SUM
048  10  10
049  44  SUM
050  07  07
051  97  DSZ
052  09  09
053  65  ×
054  43  RCL
055  08  08
056  22  INV
057  49  PRD
058  05  05
059  43  RCL
060  00  00
061  42  STD
062  09  09
063  22  INV
064  44  SUM
065  10  10
066  43  RCL
067  05  05
068  91  R/S
069  76  LBL
070  85  +
071  73  RC*
072  10  10
073  91  R/S
074  01  1
075  44  SUM
076  10  10
077  97  DSZ
078  09  09
079  85  +
080  91  R/S
```

3.3 Der LR-Algorithmus

Der Algorithmus von Rutishauser zur Bestimmung der Eigenwerte der regulären n,n-Matrix A beruht darauf, die Faktoren der LR-Zerlegung von A in umgekehrter Reihenfolge zu multiplizieren und dieses Vorgehen zu wiederholen:

$$\begin{array}{lll}
A & =: A_1 & = L_1 \cdot R_1 \\
R_1 \cdot L_1 & =: A_2 & = L_2 \cdot R_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
R_i \cdot L_i & =: A_{i+1} & = L_{i+1} \cdot R_{i+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Existiert die LR-Zerlegung jeder Matrix A_i und sind alle Eigenwerte von A von verschiedenem Betrag, so konvergieren die L_i gegen die Einheitsmatrix E und die R_i gegen eine obere Dreiecksmatrix R, in deren Hauptdiagonalen die Eigenwerte der Matrix A stehen.

Das Programm führt maximal eine vorzugebende Anzahl N von Iterationsschritten durch oder bricht vorher ab, falls

$$\|L_i - E\|_\infty \leq \epsilon \cdot \|A\|_\infty$$

ist, wobei ϵ eine vorzugebende Toleranzschranke ist. Vor Einlesen der Magnetkarten ist die Speicherbereichsverteilung mittels der Tastenfolge 3 2nd Op 17 auf 720 Programmspeicherstellen zu ändern. Das Programm bearbeitet Matrizen bis zur Ordnung n = 3.

Programminstruktionen

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
1	Änderung der Speicherbereichsverteilung	3	2nd	
			Op	
		17		719.29
			CLR	0

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
2	Magnetkarten einlesen (Block 1, 2, 3)			3
3	Programmbeginn		A	3
4	Eingabe der Nummer des ersten zu belegenden Speicherplatzes k = 15	15	R/S	1
5	Eingabe der Matrix A spaltenweise	a_{11}	R/S	2
		a_{21}	R/S	3
		⋮	⋮	⋮
		a_{nn}	R/S	n^2+1
6	Ende der Koeffizienteneingabe		B	n^2+1
7	Eingabe von n, k, N und ϵ	n	R/S	n
		15	R/S	15
		N	R/S	N
		ϵ	R/S	
8	Anzeige der Eigenwerte λ_i			λ_1
			R/S	λ_2
			⋮	⋮
			R/S	λ_n

Registerinhalte

$R_{00}, \ldots, R_{14}$: Programmzeiger
$R_{15}, \ldots, R_{n^2+14}$: $a_{11}, \ldots, a_{nn}$
$R_{n^2+15}, \ldots, R_{n(2n-1)+14}$: Zwischenergebnisse

Bemerkung

Ist eine LR-Zerlegung von A_i nicht möglich, so hält das Programm und der Rechner zeigt dies durch eine blinkende Anzeige an. Nach Drücken der Tasten CLR und C erfolgt dann die Anzeige der Diagonalelemente von R_{i-1}.

Beispiel

Gesucht sind in höchstens N = 5 Schritten mit der Toleranz $\epsilon = 0.001$ die Eigenwerte der Matrix $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Anmerkungen	Eingabe	Taste	Anzeige
Änderung der Speicherbereichsverteilung	3	2nd Op	
	17		719.29
		CLR	0
Magnetkarten einlesen (Block 1, 2, 3)			3
Programmbeginn		A	3
Eingabe von: k	15	R/S	1
a_{11}	6	R/S	2
a_{21}	2	R/S	3
a_{31}	0	R/S	4
a_{12}	2	R/S	5
a_{22}	6	R/S	6
a_{32}	0	R/S	7
a_{13}	−1	R/S	8
a_{23}	−3	R/S	9
a_{33}	2	R/S	10
Ende der Koeffizienteneingabe		B	10
Eingabe von: n	3	R/S	3
k	15	R/S	15
N	5	R/S	5
ϵ	0.001	R/S	
Anzeige von: λ_1			7.878787879
λ_2		R/S	4.121212121
λ_3		R/S	2

Die exakten Eigenwerte sind $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 2$.

Programm 3.3	Der LR-Algorithmus

3 2nd Op 17

```
000  76 LBL      012  00  00      024  42 STO      036  91 R/S
001  11  A       013  01   1      025  00  00      037  42 STO
002  91 R/S      014  44 SUM      026  42 STO      038  12  12
003  42 STO      015  00  00      027  09  09      039  76 LBL
004  00  00      016  44 SUM      028  91 R/S      040  22 INV
005  01   1      017  01  01      029  42 STO      041  43 RCL
006  42 STO      018  61 GTO      030  01  01      042  00  00
007  01  01      019  00  00      031  42 STO      043  42 STO
008  43 RCL      020  08  08      032  03  03      044  08  08
009  01  01      021  76 LBL      033  91 R/S      045  76 LBL
010  91 R/S      022  12  B       034  42 STO      046  23 LNX
011  72 ST*      023  91 R/S      035  02  02      047  73 RC*
```

```
048  03  03
049  50  I×I
050  44  SUM
051  11  11
052  01  1
053  44  SUM
054  03  03
055  97  DSZ
056  08  08
057  23  LNX
058  43  RCL
059  11  11
060  77  GE
061  00  00
062  69  69
063  00  0
064  42  STO
065  11  11
066  61  GTO
067  00  00
068  73  73
069  32  X:T
070  00  0
071  42  STO
072  11  11
073  97  DSZ
074  09  09
075  22  INV
076  32  X:T
077  42  STO
078  11  11
079  76  LBL
080  24  CE
081  43  RCL
082  00  00
083  75  -
084  01  1
085  95  =
086  42  STO
087  04  04
088  43  RCL
089  01  01
090  42  STO
091  05  05
092  85  +
093  01  1
094  95  =
095  42  STO
096  03  03
097  00  0
098  32  X:T
099  73  RC*
100  05  05
101  22  INV
102  67  EQ
103  25  CLR
104  99  PRT
105  91  R/S
106  76  LBL
107  25  CLR
108  73  RC*
109  05  05
110  22  INV
111  64  PD*
112  03  03
113  01  1
114  44  SUM
115  03  03
116  97  DSZ
117  04  04
118  25  CLR
119  43  RCL
120  01  01
121  85  +
122  43  RCL
123  00  00
124  95  =
125  42  STO
126  04  04
127  85  +
128  01  1
129  95  =
130  42  STO
131  05  05
132  42  STO
133  06  06
134  43  RCL
135  01  01
136  85  +
137  01  1
138  95  =
139  42  STO
140  03  03
141  43  RCL
142  00  00
143  75  -
144  01  1
145  95  =
146  42  STO
147  07  07
148  76  LBL
149  32  X:T
150  43  RCL
151  00  00
152  75  -
153  43  RCL
154  07  07
155  95  =
156  42  STO
157  08  08
158  01  1
159  42  STO
160  10  10
161  76  LBL
162  33  X²
163  43  RCL
164  10  10
165  42  STO
166  09  09
167  76  LBL
168  34  ΓX
169  73  RC*
170  03  03
171  65  ×
172  73  RC*
173  04  04
174  95  =
175  22  INV
176  74  SM*
177  05  05
178  43  RCL
179  00  00
180  44  SUM
181  03  03
182  01  1
183  44  SUM
184  04  04
185  97  DSZ
186  09  09
187  34  ΓX
188  43  RCL
189  10  10
190  65  ×
191  43  RCL
192  00  00
193  75  -
194  01  1
195  95  =
196  22  INV
197  44  SUM
198  03  03
199  43  RCL
200  10  10
201  22  INV
202  44  SUM
203  04  04
204  01  1
205  44  SUM
206  05  05
207  44  SUM
208  10  10
209  97  DSZ
210  08  08
211  33  X²
212  43  RCL
213  07  07
214  75  -
215  01  1
216  95  =
217  42  STO
218  08  08
219  67  EQ
220  77  GE
221  76  LBL
222  35  1/X
223  43  RCL
224  00  00
225  75  -
226  43  RCL
227  07  07
228  95  =
229  42  STO
230  09  09
231  76  LBL
232  42  STO
233  73  RC*
234  03  03
235  65  ×
236  73  RC*
237  04  04
238  95  =
239  22  INV
240  74  SM*
241  05  05
242  43  RCL
243  00  00
244  44  SUM
245  03  03
246  01  1
247  44  SUM
248  04  04
249  97  DSZ
250  09  09
251  42  STO
252  73  RC*
253  06  06
254  22  INV
255  67  EQ
256  39  COS
257  14  D
258  91  R/S
259  76  LBL
260  39  COS
261  22  INV
262  64  PD*
263  05  05
264  53  (
265  43  RCL
266  03  03
267  75  -
268  43  RCL
269  07  07
270  54  )
271  22  INV
272  44  SUM
273  04  04
274  65  ×
275  43  RCL
276  00  00
277  75  -
278  01  1
279  95  =
280  22  INV
281  44  SUM
282  03  03
283  01  1
284  44  SUM
285  05  05
286  97  DSZ
287  08  08
288  35  1/X
289  43  RCL
290  05  05
291  42  STO
292  04  04
293  01  1
294  44  SUM
295  05  05
```

```
296 43 RCL
297 01 01
298 85 +
299 01 1
300 95 =
301 42 STO
302 03 03
303 43 RCL
304 00 00
305 85 +
306 01 1
307 95 =
308 44 SUM
309 06 06
310 97 DSZ
311 07 07
312 32 X:T
313 76 LBL
314 77 GE
315 00 0
316 42 STO
317 13 13
318 43 RCL
319 00 00
320 75 -
321 01 1
322 95 =
323 42 STO
324 08 08
325 43 RCL
326 01 01
327 85 +
328 01 1
329 95 =
330 42 STO
331 03 03
332 76 LBL
333 43 RCL
334 43 RCL
335 08 08
336 42 STO
337 09 09
338 76 LBL
339 44 SUM
340 73 RC*
341 03 03
342 50 I×I
343 44 SUM
344 13 13
345 01 1
346 44 SUM
347 03 03
348 97 DSZ
349 09 09
350 44 SUM
351 43 RCL
352 13 13
353 77 GE
354 81 RST
355 00 0
356 00 0
357 42 STO
358 13 13
359 61 GTO
360 91 R/S
361 76 LBL
362 81 RST
363 32 X:T
364 00 0
365 42 STO
366 13 13
367 76 LBL
368 91 R/S
369 43 RCL
370 00 00
371 85 +
372 01 1
373 75 -
374 43 RCL
375 08 08
376 95 =
377 44 SUM
378 03 03
379 97 DSZ
380 08 08
381 43 RCL
382 32 X:T
383 42 STO
384 13 13
385 43 RCL
386 11 11
387 65 ×
388 43 RCL
389 12 12
390 95 =
391 32 X:T
392 43 RCL
393 13 13
394 22 INV
395 77 GE
396 13 C
397 43 RCL
398 01 01
399 85 +
400 43 RCL
401 00 00
402 33 X^2
403 75 -
404 01 1
405 95 =
406 42 STO
407 03 03
408 75 -
409 43 RCL
410 00 00
411 95 =
412 42 STO
413 04 04
414 85 +
415 43 RCL
416 00 00
417 33 X^2
418 95 =
419 42 STO
420 05 05
421 01 1
422 42 STO
423 06 06
424 42 STO
425 14 14
426 43 RCL
427 00 00
428 42 STO
429 07 07
430 75 -
431 01 1
432 95 =
433 42 STO
434 08 08
435 00 0
436 32 X:T
437 76 LBL
438 45 Y^x
439 00 0
440 72 ST*
441 05 05
442 43 RCL
443 06 06
444 75 -
445 43 RCL
446 14 14
447 95 =
448 22 INV
449 77 GE
450 38 SIN
451 43 RCL
452 14 14
453 42 STO
454 09 09
455 42 STO
456 10 10
457 61 GTO
458 52 EE
459 76 LBL
460 38 SIN
461 43 RCL
462 06 06
463 42 STO
464 09 09
465 42 STO
466 10 10
467 76 LBL
468 52 EE
469 73 RC*
470 03 03
471 65 ×
472 73 RC*
473 04 04
474 95 =
475 74 SM*
476 05 05
477 43 RCL
478 00 00
479 22 INV
480 44 SUM
481 03 03
482 01 1
483 22 INV
484 44 SUM
485 04 04
486 97 DSZ
487 09 09
488 52 EE
489 43 RCL
490 10 10
491 44 SUM
492 04 04
493 65 ×
494 43 RCL
495 00 00
496 95 =
497 44 SUM
498 03 03
499 01 1
500 44 SUM
501 14 14
502 43 RCL
503 00 00
504 22 INV
505 44 SUM
506 04 04
507 22 INV
508 44 SUM
509 05 05
510 97 DSZ
511 08 08
512 45 Y^x
513 01 1
514 42 STO
515 14 14
516 44 SUM
517 06 06
518 22 INV
519 44 SUM
520 03 03
521 75 -
522 43 RCL
523 00 00
524 33 X^2
525 85 +
526 43 RCL
527 00 00
528 95 =
529 22 INV
530 44 SUM
531 05 05
532 43 RCL
533 01 01
534 85 +
535 43 RCL
536 00 00
537 33 X^2
538 75 -
539 43 RCL
540 00 00
541 75 -
542 01 1
543 95 =
```

544	42	STO
545	04	04
546	43	RCL
547	00	00
548	75	-
549	01	1
550	95	=
551	42	STO
552	08	08
553	97	DSZ
554	07	07
555	45	Y^X
556	43	RCL
557	01	01
558	85	+
559	01	1
560	95	=
561	42	STO
562	03	03
563	85	+
564	43	RCL
565	00	00
566	33	X^2
567	95	=
568	42	STO
569	04	04
570	43	RCL
571	00	00
572	75	-
573	01	1
574	95	=
575	42	STO
576	08	08
577	76	LBL
578	53	(
579	43	RCL
580	08	08
581	42	STO
582	09	09
583	76	LBL
584	54	)
585	73	RC*
586	04	04
587	72	ST*
588	03	03
589	01	1
590	44	SUM
591	03	03
592	44	SUM
593	04	04
594	97	DSZ
595	09	09
596	54	)
597	43	RCL
598	00	00
599	85	+
600	01	1
601	75	-
602	43	RCL
603	08	08
604	95	=
605	44	SUM
606	03	03
607	44	SUM
608	04	04
609	97	DSZ
610	08	08
611	53	(
612	43	RCL
613	01	01
614	42	STO
615	03	03
616	85	+
617	43	RCL
618	00	00
619	33	X^2
620	95	=
621	42	STO
622	04	04
623	43	RCL
624	00	00
625	75	-
626	01	1
627	95	=
628	42	STO
629	08	08
630	76	LBL
631	55	÷
632	43	RCL
633	00	00
634	75	-
635	43	RCL
636	08	08
637	95	=
638	42	STO
639	09	09
640	76	LBL
641	61	GTO
642	73	RC*
643	04	04
644	74	SM*
645	03	03
646	01	1
647	44	SUM
648	03	03
649	44	SUM
650	04	04
651	97	DSZ
652	09	09
653	61	GTO
654	43	RCL
655	01	01
656	85	+
657	53	(
658	43	RCL
659	00	00
660	75	-
661	43	RCL
662	08	08
663	54	)
664	65	×
665	43	RCL
666	00	00
667	95	=
668	42	STO
669	03	03
670	85	+
671	43	RCL
672	00	00
673	33	X^2
674	95	=
675	42	STO
676	04	04
677	97	DSZ
678	08	08
679	55	÷
680	97	DSZ
681	02	02
682	24	CE
683	76	LBL
684	13	C
685	43	RCL
686	00	00
687	42	STO
688	09	09
689	43	RCL
690	01	01
691	42	STO
692	03	03
693	76	LBL
694	94	+/-
695	73	RC*
696	03	03
697	91	R/S
698	01	1
699	85	+
700	43	RCL
701	00	00
702	95	=
703	44	SUM
704	03	03
705	97	DSZ
706	09	09
707	94	+/-
708	91	R/S

3.4 Iteration in einer Variablen

Gegeben sei eine kontrahierende Abbildung f, die der Lipschitzbedingung

$$|f(x) - f(y)| < L \cdot |x - y|$$

mit $0 < L < 1$ für $x, y \in [a, b]$ genügt. Das Programm liefert den Fixpunkt $s = f(s)$ als Grenzwert der Folge

$$x_{i+1} = f(x_i); \quad i = 0, 1, \ldots$$

für jeden Startwert $x_0 \in [a, b]$. Es bricht ab, falls die Höchstzahl N von Iterationen durchgeführt wurde oder falls für vorzugebendes $\epsilon > 0$ gilt:

$$|x_i - x_{i-1}| \leq \epsilon \cdot \frac{1-L}{L}.$$

Die Abbildung f wird als Unterprogramm eingegeben. Dabei ist folgendes zu beachten:

1. Die Funktionsvorschrift f (x) ist in Klammern einzuschließen.
2. Für x ist RCL 00 zu setzen.
3. Die Taste = darf nicht verwendet werden.
4. Die Eingabe der Funktionsvorschrift ist mit INV SBR abzuschließen.

Programminstruktionen

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
1	Magnetkarte einlesen (Block 1)			1
2	Eingabe der Funktionsvorschrift		GTO	
			x^2	
			LRN	056 00
			(	057 00
			:	: :
			)	XXX 00
			INV	XXX 00
			SBR	XXX 00
			LRN	1
3	Programmbeginn		A	1
4	Eingabe von x_0, L, ϵ, N	x_0	R/S	x_0
		L	R/S	L
		ϵ	R/S	ϵ
		N	R/S	
5	Ergebnisanzeige			s

Registerinhalte

$R_{00}, \ldots, R_{04}$: Programmzeiger

Beispiel

Gesucht ist $s = f(s)$ mit $f(x) = \frac{\cos x}{2}$ im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\epsilon = 10^{-10}$ und $N = 10$.

Dabei sei $L = 0.5$, denn es gilt $|f'(x)| = \left|\frac{-\sin x}{2}\right| \leq 0.5$

Anmerkungen	Eingabe	Taste	Anzeige
Umschalten auf Bogenmaß		2nd	
		Rad	
Magnetkarte einlesen (Block 1)			1
Eingabe von f (x)		GTO	
		x^2	
		LRN	056 00
		(	057 00
		RCL	058 00
		00	059 00
		2nd	059 00
		cos	060 00
		÷	061 00
		2	062 00
		)	063 00
		INV	064 00
		SBR	064 00
		LRN	1
Programmbeginn		A	1
Eingabe von: x_0	0.1	R/S	0.1
L	0.5	R/S	0.5
ϵ	1	EE	1 00
	−10		1 −10
		R/S	1 −10
		INV	
		EE	.0000000001
N	10	R/S	
Anzeige von: s			.4501835576

Programm 3.4	Iteration in einer Variablen

```
000  76  LBL
001  11   A
002  91  R/S
003  42  STO
004  00   00
005  91  R/S
006  42  STO
007  01   01
008  91  R/S
009  42  STO
010  02   02
011  91  R/S
012  42  STO
013  03   03
014  43  RCL
015  02   02
016  65   ×
017  53   (
018  01   1
019  75   -
020  43  RCL
021  03   03
022  54   )
023  55   ÷
024  43  RCL
025  03   03
026  95   =
027  32  X:T
028  76  LBL
029  13   C
030  71  SBR
031  33  X²
032  42  STO
033  04   04
034  75   -
035  43  RCL
036  00   00
037  95   =
038  50  I×I
039  22  INV
040  77   GE
041  14   D
042  43  RCL
043  04   04
044  42  STO
045  00   00
046  97  DSZ
047  03   03
048  13   C
049  76  LBL
050  14   D
051  43  RCL
052  04   04
053  91  R/S
054  76  LBL
055  33  X²
```

3.5 Steffensen-Iteration

Gegeben sei eine in [a, b] kontrahierende Abbildung f. Dann konvergiert die Folge

$$x_{i+1} = x_i - \frac{(f(x_i) - x_i)}{f(f(x_i)) - 2f(x_i) + x_i} \cdot (f(x_i) - x_i) \qquad i = 0, 1, \ldots$$

gegen den Fixpunkt $s = f(s)$ von f. Vorzugeben ist eine Toleranz $\eta > 0$ und die Höchstzahl N von Iterationen. Das Programm bricht bereits nach weniger als N Schritten ab, wenn

$$|x_{i+1} - x_i| < \eta$$

ist. Die Abbildung f wird als Unterprogramm eingegeben. Dabei ist folgendes zu beachten:

1. Die Funktionsvorschrift f(x) ist in Klammern einzuschließen.
2. Für x ist RCL 00 zu setzen.
3. Die Taste = darf nicht verwendet werden.
4. Die Eingabe der Funktionsvorschrift ist mit INV SBR abzuschließen.

Programminstruktionen

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
1	Magnetkarte einlesen (Block 1)			1
2	Eingabe der Funktionsvorschrift f(x)		GTO	
			x^2	
			LRN	077 00
			(	078 00
			⋮	⋮ ⋮
			)	XXX 00
			INV	XXX 00
			SBR	XXX 00
			LRN	1
3	Programmbeginn		A	1
4	Eingabe von x_0, η, N	x_0	R/S	x_0
		η	R/S	η
		N	R/S	
5	Ergebnisanzeige			s

Registerinhalte

$R_{00}, \ldots, R_{05}$: Programmzeiger

Beispiel

Gesucht ist der Fixpunkt $s = f(s)$ von $f(x) = \frac{\cos x}{2}$ im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ mit $\eta = 10^{-10}$, $N = 10$ und dem Startwert $x_0 = 0.1$.

Anmerkungen	Eingabe	Taste	Anzeige
Umschalten auf Bogenmaß		2nd	
		Rad	
Magnetkarte einlesen (Block 1)			1
Eingabe der Funktionsvorschrift f(x)		GTO	
		x^2	
		LRN	077 00
		(	078 00
		RCL	079 00
		00	080 00
		2nd	080 00
		cos	081 00
		÷	082 00
		2	083 00
		)	084 00
		INV	085 00
		SBR	085 00
		LRN	1
Programmbeginn		A	1
Eingabe von: x_0	0.1	R/S	0.1
η	1	EE	1 00
	−10	R/S	0 00
		INV	
		EE	0
N	10	R/S	
Anzeige von: s			.4501835576

Programm 3.5	**Steffensen-Iteration**

```
000  76 LBL
001  11  A
002  91 R/S
003  42 STO
004  00  00
005  91 R/S
006  32 X:T
007  91 R/S
008  42 STO
009  02  02
010  76 LBL
011  12  B
012  43 RCL
013  00  00
014  42 STO
015  03  03
016  71 SBR
017  33 X²
018  42 STO
019  04  04
020  42 STO
021  03  03
022  71 SBR
023  33 X²
024  42 STO
025  05  05
026  53  (
027  53  (
028  43 RCL
029  04  04
030  75  -
031  43 RCL
032  00  00
033  54  )
034  55  ÷
035  53  (
036  43 RCL
037  05  05
038  75  -
039  02  2
040  65  ×
041  43 RCL
042  04  04
043  85  +
044  43 RCL
045  00  00
046  54  )
047  65  ×
048  53  (
049  43 RCL
050  04  04
051  75  -
052  43 RCL
053  00  00
054  54  )
055  54  )
056  42 STO
057  01  01
058  22 INV
059  44 SUM
060  00  00
061  43 RCL
062  01  01
063  50 I×I
064  22 INV
065  77  GE
066  13  C
067  97 DSZ
068  02  02
069  12  B
070  76 LBL
071  13  C'
072  43 RCL
073  00  00
074  91 R/S
075  76 LBL
076  33 X²
```

3.6 Das Newton-Verfahren

Ist s einfache Nullstelle der differenzierbaren Funktion g, so existiert eine Umgebung von s, so daß die Folge

$$x_{i+1} = x_i - \frac{g(x_i)}{g'(x_i)}; \quad i = 0, 1, \ldots$$

für jeden Startwert x_0 aus dieser Umgebung gegen s konvergiert. Vorzugeben ist eine Toleranz $\eta > 0$ und die Höchstzahl N von Iterationsschritten. Das Programm bricht bereits nach weniger als N Schritten ab, wenn

$$\left| \frac{g(x_i)}{g'(x_i)} \right| < \eta$$

ist. Die Funktion g/g' wird als Unterprogramm eingegeben. Dabei ist folgendes zu beachten:

1. Die Funktionsvorschrift g(x)/g'(x) ist in Klammern einzuschließen.
2. Für x ist RCL 00 zu setzen.
3. Die Taste = darf nicht verwendet werden.
4. Die Eingabe der Funktionsvorschrift ist mit INV SBR abzuschließen.

Programminstruktionen

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
1	Magnetkarte einlesen (Block 1)			1
2	Eingabe der Funktionsvorschrift g(x)/g'(x)		GTO	
			x^2	
			LRN	035 00
			(	036 00
			⋮	⋮ ⋮
			)	XXX 00
			INV	XXX 00
			SBR	XXX 00
			LRN	1
3	Programmbeginn		A	1
4	Eingabe von x_0, η, N	x_0	R/S	x_0
		η	R/S	0
		N	R/S	
5	Ergebnisanzeige			s

Registerinhalte

$R_{00}, \ldots, R_{02}$: Programmzeiger

Beispiel

Gesucht ist eine Nullstelle von $g(x) = x - \cos x$ mit $N = 5$, $x_0 = 0.5$ und $\eta = 10^{-10}$. Es ist

$$\frac{g(x)}{g'(x)} = \frac{x - \cos x}{1 + \sin x}$$

Anmerkungen	Eingabe	Taste	Anzeige
Umschalten auf Bogenmaß		2nd	
		Rad	
Magnetkarte einlesen (Block 1)			1
Eingabe der Funktionsvorschrift $g(x)/g'(x)$		GTO	
		x^2	
		LRN	035 00
		(	036 00
		(	037 00
		RCL	038 00
		00	039 00
		−	040 00
		RCL	041 00
		00	042 00
		2nd	042 00
		cos	043 00
		)	044 00
		÷	045 00
		(	046 00
		1	047 00
		+	048 00
		RCL	049 00
		00	050 00
		2nd	050 00
		sin	051 00
		)	052 00
		)	053 00
		INV	054 00
		SBR	054 00
		LRN	1
Programmbeginn		A	1
Eingabe von: x_0	0.5	R/S	0.5
η	1	EE	1 00
	−10	R/S	0 00
		INV	
		EE	0
N	5	R/S	
Anzeige von: s			.7390851332

Programm 3.6	Das Newton-Verfahren

```
000  76 LBL
001  11  A
002  91 R/S
003  42 STO
004  00  00
005  91 R/S
006  32 X:T
007  91 R/S
008  42 STO
009  01  01
010  76 LBL
011  12  B
012  71 SBR
013  33 X²
014  42 STO
015  02  02
016  22 INV
017  44 SUM
018  00  00
019  43 RCL
020  02  02
021  50 I×I
022  22 INV
023  77  GE
024  13  C
025  97 DSZ
026  01  01
027  12  B
028  76 LBL
029  13  C
030  43 RCL
031  00  00
032  91 R/S
033  76 LBL
034  33 X²
```

3.7 Regula falsi

Ist s Nullstelle der Funktion g und liegen die Startwerte x_0 und x_1 genügend nah bei s, so konvergiert die Folge

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{g(x_i) - g(x_{i-1})} g(x_i); \quad i = 1, 2, \ldots$$

gegen s. Die Toleranz $\eta > 0$ und die Maximalzahl N von Iterationen sind vorzugeben. Das Programm bricht ab, wenn

$$\left| \frac{x_i - x_{i-1}}{g(x_i) - g(x_{i-1})} \right| < \eta$$

ist oder N Iterationsschritte durchgeführt wurden. Die Funktion g wird als Unterprogramm eingegeben. Dabei ist folgendes zu beachten:

1. Die Funktionsvorschrift g(x) ist in Klammern einzuschließen.
2. Für x ist RCL 00 zu setzen.
3. Die Taste = darf nicht verwendet werden.
4. Die Eingabe der Funktionsvorschrift ist mit INV SBR abzuschließen.

Programminstruktionen

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
1	Magnetkarte einlesen (Block 1)			1
2	Eingabe der Funktionsvorschrift g(x)		GTO	
			x^2	
			LRN	074 00
			(	075 00
			:	: :
			)	XXX 00
			INV	XXX 00
			SBR	XXX 00
			LRN	1

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
3	Programmbeginn		A	1
4	Eingabe von x_0, x_1, η, N	x_0	R/S	x_0
		x_1	R/S	x_1
		η	R/S	0
		N	R/S	
5	Ergebnisanzeige			s

Registerinhalte

$R_{00}, \ldots, R_{04}$: Programmzeiger

Beispiel

Gesucht ist eine Nullstelle von $g(x) = x - \cos x$ mit $x_0 = 0.4$, $x_1 = 0.5$, $\eta = 10^{-10}$ und $N = 10$.

Anmerkungen	Eingabe	Taste	Anzeige
Umschalten auf Bogenmaß		2nd	
		Rad	
Magnetkarte einlesen (Block 1)			1
Eingabe der Funktionsvorschrift g(x)		GTO	
		x^2	
		LRN	074 00
		(	075 00
		RCL	076 00
		00	077 00
		−	078 00
		RCL	079 00
		00	080 00
		2nd	080 00
		cos	081 00
		)	082 00
		INV	083 00
		SBR	083 00
		LRN	1
Programmbeginn		A	1

Anmerkungen	Eingabe	Taste	Anzeige
Eingabe von: x_0	0.4	R/S	0.4
x_1	0.5	R/S	0.5
η	1	EE	1 00
	−10	R/S	0 00
		INV	
		EE	0
N	10	R/S	
Anzeige von: s			.7390851332

Programm 3.7	Regula falsi

```
000  76  LBL
001  11  A
002  91  R/S
003  42  STO
004  04  04
005  91  R/S
006  42  STO
007  01  01
008  91  R/S
009  32  X↕T
010  91  R/S
011  42  STO
012  02  02
013  76  LBL
014  12  B
015  53  (
016  53  (
017  43  RCL
018  01  01
019  75  -
020  43  RCL
021  04  04
022  54  )
023  55  ÷
024  53  (
025  43  RCL
026  01  01
027  71  SBR
028  34  ΓX
029  42  STO
030  03  03
031  75  -
032  43  RCL
033  04  04
034  71  SBR
035  34  ΓX
036  54  )
037  65  ×
038  43  RCL
039  03  03
040  54  )
041  42  STO
042  03  03
043  22  INV
044  44  SUM
045  01  01
046  43  RCL
047  03  03
048  50  I×I
049  22  INV
050  77  GE
051  13  C
052  43  RCL
053  01  01
054  85  +
055  43  RCL
056  03  03
057  95  =
058  42  STO
059  04  04
060  97  DSZ
061  02  02
062  12  B
063  76  LBL
064  13  C
065  43  RCL
066  01  01
067  91  R/S
068  76  LBL
069  34  ΓX
070  42  STO
071  00  00
072  76  LBL
073  33  X²
```

3.8 Das Horner-Schema

Zur Auswertung eines Polynoms

$$\text{pol}(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n$$

an einer Stelle $\lambda = \lambda_0$ schreibt man zweckmäßigerweise

$$p := \text{pol}(\lambda_0) = (\ldots(a_0\lambda_0 + a_1)\cdot\lambda_0 + a_2)\cdot\lambda_0 \ldots + a_{n-1})\cdot\lambda_0 + a_n$$

und arbeitet die Klammern von innen nach außen ab. Das Programm hat so nur Additionen und Multiplikationen mit dem festen Faktor $\lambda = \lambda_0$ durchzuführen. Eingegeben werden nur die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ von pol (λ).

Beachte: a_0 ist der Koeffizient von λ^n!

Programminstruktionen

Nr. 214 streichen!

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
1	Magnetkarte einlesen (Block 1)			1
2	Programmbeginn Wozu?		A	1
3	Eingabe von n; $a_0, a_1, \ldots, a_n$	n	R/S	0
		a_0	R/S	1
		a_1	R/S	2
		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
		a_n	R/S	n+1
4	Ende der Koeffizienteneingabe Wozu?		B	n+1
5	Eingabe von λ_0	λ_0	R/S	
6	Ergebnisanzeige			p

Weitere Werte?

Registerinhalte

$R_{00}, \ldots, R_{05}$: Programmzeiger
$R_{06}, \ldots, R_{n+6}$: $a_0, a_1, \ldots, a_n$

Beispiel

Zu berechnen ist der Funktionswert des Polynoms

$$\mathrm{pol}(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda - 2$$

an den Stellen $\lambda_0 = 0.5$ und $\lambda_1 = 1.5$

Anmerkungen	Eingabe	Taste	Anzeige
Magnetkarte einlesen (Block 1)			1
Programmbeginn		A	1
Eingabe von: n	3	R/S	0
a_0	−1	R/S	1
a_1	3	R/S	2
a_2	4	R/S	3
a_3	−2	R/S	4
Ende der Koeffizienteneingabe		B	4
Eingabe von: λ_0	0.5	R/S	
Anzeige von: $p_0 = \mathrm{pol}(\lambda_0)$			0.625
anderes Argument		B	0.625
Eingabe von: λ_1	1.5	R/S	
Anzeige von: $p_1 = \mathrm{pol}(\lambda_1)$			7.375

Programm 3.8	Das Horner-Schema

```
000  76 LBL
001  11  A
002  91 R/S   Oom!
003  42 STO
004  00  00
005  00  0
006  42 STO
007  02  02
008  06  6
009  42 STO
010  05  05
011  76 LBL
012  33 X²
013  43 RCL
014  02  02
015  91 R/S
016  72 ST*
017  05  05
018  01  1
019  44 SUM
020  05  05
021  44 SUM
022  02  02
023  61 GTO
024  33 X²
025  76 LBL
026  12  B
027  91 R/S   Oom!
028  42 STO
029  02  02
030  07  7
031  42 STO   BRA
032  04  04
033  43 RCL
034  00  00
035  42 STO
036  01  01
037  43 RCL   a0
038  06  06
039  42 STO
040  03  03
041  76 LBL
042  34 ΓX
043  43 RCL
044  02  02
045  49 PRD
046  03  03
047  73 RC*
048  04  04
049  44 SUM
050  03  03
051  01  1
052  44 SUM
053  04  04
054  97 DSZ
055  01  01
056  34 ΓX
057  43 RCL
058  03  03
059  91 R/S
```

3.9 Das erweiterte Horner-Schema

Das erweiterte Horner-Schema liefert außer dem Funktionswert p des Polynoms

$$\mathrm{pol}(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n$$

(siehe 3.8 „Das Horner-Schema") auch den Wert der Ableitung $q = \mathrm{pol}'(\lambda)$ an der Stelle $\lambda = \lambda_0$. Eingegeben werden nur die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ von $\mathrm{pol}(\lambda)$.

Beachte: a_0 ist der Koeffizient von λ^n!

Programminstruktionen

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
1	Magnetkarte einlesen (Block 1)			1
2	Programmbeginn		A	1
3	Eingabe von n; $a_0, a_1, \ldots, a_n$	n	R/S	0
		a_0	R/S	1
		a_1	R/S	2
		⋮	⋮	⋮
		a_n	R/S	n+1
4	Ende der Koeffizienteneingabe		B	n+1
5	Eingabe von λ_0	λ_0	R/S	
6	Ergebnisanzeige			p
			R/S	q

Registerinhalte

$R_{00}, \ldots, R_{06}$: Programmzeiger

$R_{07}, \ldots, R_{n+7}$: $a_0, a_1, \ldots, a_n$

Beispiel

Gesucht sind Funktionswerte und 1. Ableitungen des Polynoms

$$\mathrm{pol}\,(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda - 2$$

an den Stellen $\lambda_0 = -1.5$ und $\lambda_1 = 2.5$

Anmerkungen	Eingabe	Taste	Anzeige
Magnetkarte einlesen (Block 1)			1
Programmbeginn		A	1
Eingabe von: n	3	R/S	0
a_0	−1	R/S	1
a_1	3	R/S	2
a_2	4	R/S	3
a_3	−2	R/S	4
Ende der Koeffizienteneingabe		B	4
Eingabe von: λ_0	−1.5	R/S	
Anzeige von: $p_0 = \mathrm{pol}\,(\lambda_0)$			2.125
$q_0 = \mathrm{pol}'\,(\lambda_0)$		R/S	−11.75
anderes Argument		B	−11.75
Eingabe von: λ_1	2.5	R/S	
Anzeige von: $p_1 = \mathrm{pol}\,(\lambda_1)$			11.125
$q_1 = \mathrm{pol}'\,(\lambda_1)$		R/S	0.25

Programm 3.9	**Das erweiterte Horner-Schema**

```
000  76 LBL     018  01  1      036  03  03     055  02  02
001  11  A      019  44 SUM     037  08  8      056  49 PRD
002  91 R/S     020  06  06     038  42 STO     057  04  04
003  42 STO     021  44 SUM     039  05  05     058  73 RC*
004  00  00     022  02  02     040  43 RCL     059  05  05
005  00  0      023  61 GTO     041  07  07     060  44 SUM
006  42 STO     024  33 X²      042  42 STO     061  04  04
007  02  02     025  76 LBL     043  04  04     062  01  1
008  07  7      026  12  B      044  76 LBL     063  44 SUM
009  42 STO     027  91 R/S     045  34 ΓX      064  05  05
010  06  06     028  42 STO     046  43 RCL     065  97 DSZ
011  76 LBL     029  02  02     047  02  02     066  01  01
012  33 X²      030  43 RCL     048  49 PRD     067  34 ΓX
013  43 RCL     031  00  00     049  03  03     068  43 RCL
014  02  02     032  42 STO     050  43 RCL     069  04  04
015  91 R/S     033  01  01     051  04  04     070  91 R/S
016  72 ST*     034  00  0      052  44 SUM     071  43 RCL
017  06  06     035  42 STO     053  03  03     072  03  03
                                054  43 RCL     073  91 R/S
```

3.10 Einfache Nullstellen von Polynomen

Einfache Nullstellen s eines Polynoms

$$\mathrm{pol}(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n$$

bestimmt man durch das Iterationsverfahren von Newton (siehe 3.6 „Das Newton-Verfahren"):

$$\lambda_{i+1} = \lambda_i - \frac{\mathrm{pol}(\lambda_i)}{\mathrm{pol}'(\lambda_i)}; \quad i = 0, 1, \ldots$$

Dabei ist λ_0 ein geeigneter Startwert. Der Quotient

$$q := \frac{\mathrm{pol}(\lambda_i)}{\mathrm{pol}'(\lambda_i)}$$

wird im erweiterten Horner-Schema bestimmt (siehe 3.9 „Das erweiterte Horner-Schema"). Eingegeben werden neben den Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ und dem Startwert λ_0 eine Toleranz $\epsilon > 0$ und die Höchstzahl N von Iterationen. Das Programm bricht nach weniger als N Schritten ab, wenn

$$|q| < \epsilon \qquad \text{ist.}$$

Beachte: a_0 ist der Koeffizient von λ^n!

Programminstruktionen

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
1	Magnetkarte einlesen (Block 1)			1
2	Programmbeginn		A	1
3	Eingabe von $n, \epsilon, a_0, \ldots, a_n$	n	R/S	n
		ϵ	R/S	0
		a_0	R/S	1
		a_1	R/S	2
		⋮	⋮	⋮
		a_n	R/S	n+1
4	Ende der Koeffizienteneingabe		B	n+1
5	Eingabe von λ_0 und N	λ_0	R/S	λ_0
		N	R/S	
6	Ergebnisanzeige			s

Registerinhalte

$R_{00}, \ldots, R_{07}$: Programmzeiger
$R_{08}, \ldots, R_{n+8}$: $a_0, a_1, \ldots, a_n$

Beispiel

Gesucht sind die Nullstellen s_1, s_2, s_3 von

$$\mathrm{pol}(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda - 2$$

und den Startwerten $\lambda_{01} = -1$, $\lambda_{02} = 1$, $\lambda_{03} = 5$ und $\epsilon = 10^{-10}$

Anmerkungen	Eingabe	Taste	Anzeige
Magnetkarte einlesen (Block 1)			1
Programmbeginn		A	1
Eingabe von: n	3	R/S	3
ϵ	1	EE	1 00
	–10	R/S	0 00
		INV	
		EE	0
a_0	–1	R/S	1
a_1	3	R/S	2
a_2	4	R/S	3
a_3	–2	R/S	4
Ende der Koeffizienteneingabe		B	4
Eingabe von: $\lambda_{0\,1}$	–1	R/S	–1
N	10	R/S	
Anzeige von: s_1			–1.292401585
anderer Startwert		B	–1.292401585
Eingabe von: $\lambda_{0\,2}$	1	R/S	1
N	10	R/S	
Anzeige von: s_2			.3972950693
anderer Startwert		B	.3972950693
Eingabe von: $\lambda_{0\,3}$	5	R/S	5
N	10	R/S	
Anzeige von: s_3			3.895106516

Programm 3.10	Einfache Nullstellen von Polynomen

```
000  76  LBL
001  11   A
002  91  R/S
003  42  STO
004  00   00
005  91  R/S
006  32  X:T
007  00   0
008  42  STO
009  02   02
010  08   8
011  42  STO
012  07   07
013  76  LBL
014  33  X²
015  43  RCL
016  02   02
017  91  R/S
018  72  ST*
019  07   07
020  01   1
021  44  SUM
022  07   07
023  44  SUM
024  02   02
025  61  GTO
026  33  X²
027  76  LBL
028  12   B
029  91  R/S
030  42  STO
031  02   02
```

```
032  91 R/S      049  42 STO      066  05  05      083  22 INV
033  42 STO      050  04  04      067  44 SUM      084  77  GE
034  06  06      051  76 LBL      068  04  04      085  14  D
035  76 LBL      052  34 ΓX       069  01  1       086  43 RCL
036  13  C       053  43 RCL      070  44 SUM      087  04  04
037  43 RCL      054  02  02      071  05  05      088  22 INV
038  00  00      055  49 PRD      072  97 DSZ      089  44 SUM
039  42 STO      056  03  03      073  01  01      090  02  02
040  01  01      057  43 RCL      074  34 ΓX       091  97 DSZ
041  00  0       058  04  04      075  43 RCL      092  06  06
042  42 STO      059  44 SUM      076  03  03      093  13  C
043  03  03      060  03  03      077  22 INV      094  76 LBL
044  09  9       061  43 RCL      078  49 PRD      095  14  D
045  42 STO      062  02  02      079  04  04      096  43 RCL
046  05  05      063  49 PRD      080  43 RCL      097  02  02
047  43 RCL      064  04  04      081  04  04      098  91 R/S
048  08  08      065  73 RC*      082  50 I×I
```

3.11 Das Verfahren von Bairstow

Hat das reelle Polynom

$$\mathrm{pol}(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n$$

die komplexe Nullstelle μ, so ist auch die zu μ konjugiert komplexe Zahl $\bar{\mu}$ Nullstelle von pol (λ) und $(\lambda - \mu)(\lambda - \bar{\mu})$ ist ein reelles quadratisches Polynom $\lambda^2 - u\lambda - v$, das sich nach dem Euklidischen Algorithmus von pol (λ) abspalten läßt. Sind u_0 und v_0 Näherungen für u und v in $\lambda^2 - u\lambda - v$, so liefert das Programm verbesserte Näherungen $u_1 = u_0 + \Delta u$ und $v_1 = v_0 + \Delta v$.

Beachte: a_0 ist der Koeffizient von λ^n!

Programminstruktionen

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
1	Magnetkarte einlesen (Block 1)			1
2	Programmbeginn		A	1
3	Eingabe von $n, u_0, v_0, a_0, a_1, \ldots, a_n$	n	R/S	n
		u_0	R/S	u_0
		v_0	R/S	0
		a_0	R/S	1
		a_1	R/S	2
		⋮	⋮	⋮
		a_n	R/S	n+1
4	Ende der Koeffizienteneingabe		B	
5	Anzeige von u_1 und v_1			u_1
			R/S	v_1

Registerinhalte

$R_{00}, \ldots, R_{10}$: Programmzeiger
$R_{11}, \ldots, R_{n+11}$: $a_0, \ldots, a_n$
$R_{n+12}, \ldots, R_{3n+13}$: Zwischenergebnisse

Bemerkung

Das Verfahren ist nicht auf Paare konjugiert komplexer Nullstellen beschränkt.

Beispiel

Die Näherung des quadratischen Faktors

$$\lambda^2 - u_0\lambda - v_0 = \lambda^2 - 1.8\,\lambda - (-2.3)$$

von

$$\text{pol}\,(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^3 - 6\lambda^2 + 14\lambda - 12$$

soll verbessert werden.

Anmerkungen	Eingabe	Taste	Anzeige
Magnetkarte einlesen (Block 1)			1
Programmbeginn		A	1
Eingabe von: n	4	R/S	4
u_0	1.8	R/S	1.8
v_0	−2.3	R/S	0
a_0	1	R/S	1
a_1	−1	R/S	2
a_2	−6	R/S	3
a_3	14	R/S	4
a_4	−12	R/S	5
Ende der Koeffizienteneingabe		B	
Anzeige von: u_1			1.941934625
v_1		R/S	−1.983128031

Es ist $u = 2$ und $v = -2$.

Programm 3.11	Das Verfahren von Bairstow

```
000  76  LBL
001  11   A
002  91  R/S
003  42  STO
004  10   10
005  91  R/S
006  42  STO
007  01   01
008  91  R/S
009  42  STO
010  02   02
011  00   0
012  42  STO
013  03   03
014  01   1
015  01   1
016  42  STO
017  04   04
018  76  LBL
019  33  X²
020  43  RCL
021  03   03
022  91  R/S
023  72  ST*
024  04   04
025  01   1
026  44  SUM
027  03   03
028  44  SUM
029  04   04
030  61  GTO
031  33  X²
032  76  LBL
033  12   B
034  43  RCL
035  10   10
036  42  STO
037  00   00
038  85   +
039  01   1
040  03   3
041  95   =
042  42  STO
043  03   03
044  42  STO
045  04   04
046  85   +
047  01   1
048  95   =
049  42  STO
050  06   06
051  43  RCL
052  11   11
053  72  ST*
054  03   03
055  01   1
056  22  INV
057  44  SUM
058  03   03
059  00   0
060  72  ST*
061  03   03
062  01   1
063  02   2
064  42  STO
065  05   05
066  02   2
067  65   ×
068  43  RCL
069  00   00
070  85   +
071  01   1
072  04   4
073  95   =
074  42  STO
075  07   07
076  00   0
077  72  ST*
078  07   07
079  43  RCL
080  07   07
081  85   +
082  01   1
083  95   =
084  42  STO
085  08   08
086  85   +
087  01   1
088  95   =
089  42  STO
090  09   09
091  00   0
092  72  ST*
093  08   08
094  76  LBL
095  34  ΓX
096  43  RCL
097  02   02
098  65   ×
099  73  RC*
100  03   03
101  85   +
102  43  RCL
103  01   01
104  65   ×
105  73  RC*
106  04   04
107  85   +
108  73  RC*
109  05   05
110  95   =
111  72  ST*
112  06   06
113  43  RCL
114  02   02
115  65   ×
116  73  RC*
117  07   07
118  85   +
119  43  RCL
120  01   01
121  65   ×
122  73  RC*
123  08   08
124  85   +
125  73  RC*
126  04   04
127  95   =
128  72  ST*
129  09   09
130  01   1
131  44  SUM
132  03   03
133  44  SUM
134  04   04
135  44  SUM
136  05   05
137  44  SUM
138  06   06
139  44  SUM
140  07   07
141  44  SUM
142  08   08
143  44  SUM
144  09   09
145  97  DSZ
146  00   00
147  34  ΓX
148  01   1
149  94  +/-
150  44  SUM
151  06   06
152  44  SUM
153  04   04
154  44  SUM
155  09   09
156  44  SUM
157  08   08
158  44  SUM
159  07   07
160  73  RC*
161  09   09
162  65   ×
163  73  RC*
164  07   07
165  75   -
166  73  RC*
167  08   08
168  33  X²
169  95   =
170  42  STO
171  05   05
172  53   (
173  73  RC*
174  06   06
175  65   ×
176  73  RC*
177  07   07
178  75   -
179  73  RC*
180  04   04
181  65   ×
182  73  RC*
183  08   08
184  54   )
185  55   ÷
186  43  RCL
187  05   05
188  95   =
189  22  INV
190  44  SUM
191  01   01
192  53   (
193  73  RC*
194  09   09
195  65   ×
196  73  RC*
197  04   04
198  75   -
199  73  RC*
200  06   06
201  65   ×
202  73  RC*
203  08   08
204  54   )
205  55   ÷
206  43  RCL
207  05   05
208  95   =
209  22  INV
210  44  SUM
211  02   02
212  43  RCL
213  01   01
214  91  R/S
215  43  RCL
216  02   02
217  91  R/S
```

3.12 Das Bernoulli-Verfahren

Ist pol $(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n$ ein normiertes Polynom ($a_0 = 1$) vom Grad n, so ist pol (λ) das charakteristische Polynom der Matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & \\ 0 & & \cdot & \\ & & 0 & 1 \\ -a_n & \ldots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \quad \text{und es gilt}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & \\ 0 & & \cdot & \\ & & 0 & 1 \\ -a_n & \ldots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_k \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{k+n-2} \\ y_{k+n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{k+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{k+n-1} \\ y_{k+n} \end{bmatrix} \quad \text{mit}$$

$$y_{k+n} = -\sum_{i=1}^{n} a_{n+1-i} \cdot y_{k+i-1}; \quad k = 0, 1, \ldots$$

Wählt man einen geeigneten Startvektor $[y_0, \ldots, y_{n-1}]^T$, etwa $[0, \ldots, 0, 1]^T$, und besitzt pol (λ) eine betragsgrößte Nullstelle λ_1, so konvergiert die Folge der Quotienten y_{k+1}/y_k gegen λ_1. Das Programm benutzt den oben angegebenen Startvektor und bricht nach der vorzugebenden Anzahl N von Iterationsschritten ab. Es bearbeitet auch Polynome mit $a_0 \neq 1$ und eignet sich zur Bestimmung eines Startwertes für das Programm 3.11 „Einfache Nullstellen von Polynomen".

Beachte: a_0 ist der Koeffizient von λ^n!

Programminstruktionen

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
1	Magnetkarte einlesen (Block 1)			1
2	Programmbeginn		A	1
3	Eingabe von N, $a_0, a_1, \ldots, a_n$	N	R/S	0
		a_0	R/S	1
		a_1	R/S	2
		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
		a_n	R/S	n+1
4	Ende der Koeffizienteneingabe		B	
5	Anzeige von λ_1			λ_1

Registerinhalte

$R_{00}, \ldots, R_{06}$: Programmzeiger
$R_{07}, \ldots, R_{n+7}$: $a_0, a_1, \ldots, a_n$
$R_{n+8}, \ldots, R_{2n+7}$: $y_k, \ldots, y_{k+n-1}$

Beispiel

Gesucht ist in N = 5 Schritten die betragsgrößte Wurzel λ_1 von

$$\text{pol}(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda - 2$$

Anmerkungen	Eingabe	Taste	Anzeige
Magnetkarte einlesen (Block 1)			1
Programmbeginn		A	1
Eingabe von: N	5	R/S	0
a_0	−1	R/S	1
a_1	3	R/S	2
a_2	4	R/S	3
a_3	−2	R/S	4
Ende der Koeffizienteneingabe		B	
Anzeige von: λ_1			3.880829016

Programm 3.12	Das Bernoulli-Verfahren

```
000  76 LBL
001  11  A
002  91 R/S
003  42 STO
004  00  00
005  00  0
006  42 STO
007  01  01
008  07  7
009  42 STO
010  02  02
011  76 LBL
012  33 X²
013  43 RCL
014  01  01
015  91 R/S
016  72 ST*
017  02  02
018  01  1
019  44 SUM
020  01  01
021  44 SUM
022  02  02
023  61 GTO
024  33 X²
025  76 LBL
026  12  B
027  01  1
028  22 INV
029  44 SUM
030  01  01
031  43 RCL
032  01  01
033  75  -
034  01  1
035  95  =
036  42 STO
037  03  03
038  76 LBL
039  34 ΓX
040  00  0
041  72 ST*
042  02  02
043  01  1
044  44 SUM
045  02  02
046  97 DSZ
047  03  03
048  34 ΓX
049  01  1
050  72 ST*
051  02  02
052  76 LBL
053  35 1/X
054  08  8
055  42 STO
056  02  02
057  43 RCL
058  01  01
059  65  ×
060  02  2
061  85  +
062  07  7
063  95  =
064  42 STO
065  03  03
066  00  0
067  42 STO
068  06  06
069  43 RCL
070  01  01
071  42 STO
072  05  05
073  76 LBL
074  42 STO
075  73 RC*
076  02  02
077  65  ×
078  73 RC*
079  03  03
080  95  =
081  44 SUM
082  06  06
083  01  1
084  44 SUM
085  02  02
086  22 INV
087  44 SUM
088  03  03
089  97 DSZ
090  05  05
091  42 STO
092  43 RCL
093  07  07
094  94 +/-
095  22 INV
```

```
096  49  PRD
097  06   06
098  43  RCL
099  01   01
100  75   -
101  01   1
102  95   =
103  42  STO
104  05   05
105  85   +
106  09   9
107  95   =
108  42  STO
109  02   02
110  85   +
111  01   1
112  95   =
113  42  STO
114  03   03
115  76  LBL
116  43  RCL
117  73  RC*
118  03   03
119  72  ST*
120  02   02
121  01   1
122  44  SUM
123  02   02
124  44  SUM
125  03   03
126  97  DSZ
127  05   05
128  43  RCL
129  43  RCL
130  06   06
131  72  ST*
132  02   02
133  97  DSZ
134  00   00
135  35  1/X
136  43  RCL
137  02   02
138  75   -
139  01   1
140  95   =
141  42  STO
142  03   03
143  73  RC*
144  03   03
145  22  INV
146  64  PD*
147  02   02
148  73  RC*
149  02   02
150  91  R/S
```

3.13 Das inverse Bernoulli-Verfahren

Ist $\lambda_n \neq 0$ betragsmäßig kleinste Nullstelle von

$$\text{pol}(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n\ ,$$

so ist $\mu_n = 1/\lambda_n$ die betragsmäßig größte Nullstelle von

$$\text{rez}(\mu) = \mu^n \,\text{pol}\left(\tfrac{1}{\mu}\right) = a_0 + a_1\mu + \ldots + a_n\mu^n\ .$$

Wendet man die in 3.12 „Das Bernoulli-Verfahren" geschilderte Methode auf rez (μ) an, so konvergiert die Folge der Quotienten y_k/y_{k+1} gegen λ_n. Die Anzahl N der vom Programm durchzuführenden Iterationen ist vorzugeben.

Beachte: a_0 ist der Koeffizient von λ^n!

Programminstruktionen

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
1	Magnetkarte einlesen (Block 1)			1
2	Programmbeginn		A	1
3	Eingabe von N, a_0, a_1, ..., a_n	N	R/S	0
		a_0	R/S	1
		a_1	R/S	2
		⋮	⋮	⋮
		a_n	R/S	n+1
4	Ende der Koeffizienteneingabe		B	
5	Ergebnisanzeige			λ_n

Registerinhalte

$R_{00}, \ldots, R_{07}$: Programmzeiger
$R_{08}, \ldots, R_{n+7}$: $a_0, \ldots, a_n$
$R_{n+8}, \ldots, R_{2n+7}$: $y_k, \ldots, y_{k+n-1}$

Beispiel

Gesucht ist in N = 5 Schritten die betragskleinste Wurzel von

$$\text{pol}(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda - 2$$

Anmerkungen	Eingabe	Taste	Anzeige
Magnetkarte einlesen (Block 1)			1
Programmbeginn		A	1
Eingabe von: N	5	R/S	0
a_0	−1	R/S	1
a_1	3	R/S	2
a_2	4	R/S	3
a_3	−2	R/S	4
Ende der Koeffizienteneingabe		B	
Anzeige von: λ_n			.398255814

Programm 3.13	Das inverse Bernoulli-Verfahren

```
000  76  LBL
001  11   A
002  91  R/S
003  42  STO
004  00   00
005  00   0
006  42  STO
007  01   01
008  07   7
009  42  STO
010  02   02
011  76  LBL
012  33  X²
013  43  RCL
014  01   01
015  91  R/S
016  72  ST*
017  02   02
018  01   1
019  44  SUM
020  01   01
021  44  SUM
022  02   02
023  61  GTO
024  33  X²
025  76  LBL
026  12   B
027  01   1
028  22  INV
029  44  SUM
030  01   01
031  43  RCL
032  01   01
033  75   -
034  01   1
035  95   =
036  42  STO
037  03   03
038  76  LBL
039  34  √X
040  00   0
041  72  ST*
042  02   02
043  01   1
044  44  SUM
045  02   02
046  97  DSZ
047  03   03
048  34  √X
049  01   1
050  72  ST*
051  02   02
052  76  LBL
053  35  1/X
054  07   7
055  42  STO
056  02   02
057  43  RCL
058  01   01
059  42  STO
060  05   05
061  85   +
062  08   8
063  95   =
064  42  STO
065  03   03
066  00   0
067  42  STO
068  06   06
069  76  LBL
070  42  STO
071  73  RC*
072  02   02
073  65   ×
074  73  RC*
075  03   03
076  95   =
077  44  SUM
078  06   06
079  01   1
080  44  SUM
081  02   02
082  44  SUM
083  03   03
084  97  DSZ
085  05   05
086  42  STO
087  43  RCL
088  01   01
089  85   +
090  07   7
091  95   =
092  42  STO
093  02   02
094  73  RC*
095  02   02
```

096	94	+/-	110	42	STO	124	44	SUM	138	43	RCL
097	22	INV	111	02	02	125	02	02	139	02	02
098	49	PRD	112	85	+	126	44	SUM	140	75	-
099	06	06	113	01	1	127	03	03	141	01	1
100	43	RCL	114	95	=	128	97	DSZ	142	95	=
101	01	01	115	42	STO	129	05	05	143	42	STO
102	75	-	116	03	03	130	43	RCL	144	03	03
103	01	1	117	76	LBL	131	43	RCL	145	73	RC*
104	95	=	118	43	RCL	132	06	06	146	02	02
105	42	STO	119	73	RC*	133	72	ST*	147	22	INV
106	05	05	120	03	03	134	02	02	148	64	PD*
107	85	+	121	72	ST*	135	97	DSZ	149	03	03
108	09	9	122	02	02	136	00	00	150	73	RC*
109	95	=	123	01	1	137	35	1/X	151	03	03
									152	91	R/S

3.14 De QD-Algorithmus für tridiagonale Matrizen

Ist A eine tridiagonale Matrix, deren obere Nebendiagonale aus Einsen besteht

$$A = \begin{bmatrix} q_1 & 1 & & 0 \\ e_1 q_1 & e_1 + q_2 & 1 & \\ & \cdot & \cdot & 1 \\ 0 & & e_{n-1} q_{n-1} & e_{n-1} + q_n \end{bmatrix}$$

und existiert die LR-Zerlegung von A, so ist

$$L\,R = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ e_1 & \cdot & & \\ & 0 & \cdot & \\ & & e_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 & 1 & & 0 \\ & \cdot & \cdot & \\ & & & 1 \\ 0 & & & q_n \end{bmatrix}$$

Berechnet man nach den Regeln

$$e_{k-1}^{(i+1)} + q_k^{(i+1)} = e_k^{(i)} + q_k^{(i)}$$

und

$$e_k^{(i+1)}\, q_k^{(i+1)} = e_k^{(i)}\, q_{k+1}^{(i)}$$

die Folgen $(q_k^{(i)})_{i=1}^{\infty}$ und $(e_k^{(i)})_{i=1}^{\infty}$, so konvergieren die e_k gegen Null und die q_k gegen die Eigenwerte von A, falls die Eigenwerte von A paarweise von verschiedenem Betrag sind. Das Programm führt eine vorzugebende Anzahl N von QD-Schritten durch; dann erfolgt die Ausgabe von $e_1^{(N)}, \ldots, e_{n-1}^{(N)}$; $q_1^{(N)}, \ldots, q_n^{(N)}$. Wird im Verlauf der Rechnung eines der q_k zu Null, so hält das Programm und der Rechner zeigt dies durch eine blinkende Anzeige an. Die Ausgabe der momentanen e_k und q_k erfolgt dann nach Drücken der Taste C.

Programminstruktionen

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
1	Magnetkarte einlesen (Block 1)			1
2	Programmbeginn		A	1
3	Eingabe von $e_1, \ldots, e_{n-1}$; $q_1, \ldots, q_n$	e_1	R/S	2
		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
		e_{n-1}	R/S	n
		q_1	R/S	n+1
		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
		q_n	R/S	2n
4	Ende der Koeffizienteneingabe		B	2n
5	Eingabe von n und N	n	R/S	0
		N	R/S	
6	Ergebnisanzeige			$e_1^{(N)}$
			R/S	$e_2^{(N)}$
			$\vdots$	$\vdots$
			R/S	$e_{n-1}^{(N)}$
			R/S	$q_1^{(N)}$
			$\vdots$	$\vdots$
			R/S	$q_n^{(N)}$

Registerinhalte

$R_{00}, \ldots, R_{08}$: Programmzeiger
$R_{09}, \ldots, R_{n+7}$: $e_1, \ldots, e_{n-1}$
$R_{n+8}, \ldots, R_{2n+7}$: $q_1, \ldots, q_n$

Beispiel

Gesucht sind die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = L R .$$

Es ist $e_1 = 1$, $e_2 = 2$, $q_1 = q_2 = q_3 = 1$. Es sollen 20 QD-Schritte durchgeführt werden.

Anmerkungen		Eingabe	Taste	Anzeige
Magnetkarte einlesen (Block 1)				1
Programmbeginn			A	1
Eingabe von:	e_1	1	R/S	2
	e_2	2	R/S	3
	q_1	1	R/S	4
	q_2	1	R/S	5
	q_3	1	R/S	6
Ende der Koeffizienteneingabe			B	6
Eingabe von:	n	3	R/S	
	N	20	R/S	
Anzeige von:	$e_1^{(N)}$			.0000005666
	$e_2^{(N)}$		R/S	5.2804618 –22
	$q_1^{(N)}$		R/S	4.114906557
	$q_2^{(N)}$		R/S	1.745898729
	$q_3^{(N)}$		R/S	.1391941469

Programm 3.14	Der QD-Algorithmus für tridiagonale Matrizen

```
000  76 LBL
001  11  A
002  08  8
003  42 STO
004  00  00
005  01  1
006  42 STO
007  01  01
008  00  0
009  72 ST*
010  00  00
011  01  1
012  44 SUM
013  00  00
014  76 LBL
015  33 X²
016  43 RCL
017  01  01
018  91 R/S
019  72 ST*
020  00  00
021  01  1
022  44 SUM
023  00  00
024  44 SUM
025  01  01
026  61 GTO
027  33 X²
028  76 LBL
029  12  B
030  91 R/S
031  42 STO
032  00  00
033  75  -
034  01  1
035  95  =
036  42 STO
037  01  01
038  08  8
039  42 STO
040  02  02
041  25 CLR
042  91 R/S
043  42 STO
044  07  07
045  76 LBL
046  14  D
047  43 RCL
048  00  00
049  75  -
050  01  1
051  95  =
052  42 STO
053  01  01
054  43 RCL
055  02  02
056  85  +
057  43 RCL
058  00  00
059  95  =
060  42 STO
061  03  03
062  85  +
063  01  1
064  95  =
065  42 STO
066  06  06
067  43 RCL
068  02  02
069  95  =
070  42 STO
071  04  04
072  85  +
073  01  1
074  95  =
075  42 STO
076  05  05
077  76 LBL
078  34 ΓX
079  73 RC*
080  05  05
081  75  -
082  73 RC*
083  04  04
084  95  =
085  74 SM*
086  03  03
087  73 RC*
088  03  03
089  67  EQ
090  99 PRT
091  73 RC*
092  06  06
093  55  ÷
094  73 RC*
095  03  03
096  95  =
097  64 PD*
098  05  05
099  01  1
100  44 SUM
101  03  03
102  44 SUM
103  04  04
104  44 SUM
105  05  05
106  44 SUM
107  06  06
```

```
108  97 DSZ
109  01  01
110  34 ΓX
111  73 RC*
112  04  04
113  22 INV
114  74 SM*
115  03  03
116  97 DSZ
117  07  07
118  14  D
119  76 LBL
120  13  C
121  25 CLR
122  02  2
123  65  ×
124  43 RCL
125  00  00
126  75  -
127  01  1
128  95  =
129  42 STO
130  03  03
131  43 RCL
132  02  02
133  85  +
134  01  1
135  95  =
136  42 STO
137  04  04
138  76 LBL
139  22 INV
140  73 RC*
141  04  04
142  91 R/S
143  01  1
144  44 SUM
145  04  04
146  97 DSZ
147  03  03
148  22 INV
149  91 R/S
```

3.15 Der QD-Algorithmus für Polynome

Beginnt man zu einem gegebenen Polynom

$$\mathrm{pol}(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n; \qquad a_j \neq 0$$

das QD-Schema mit der horizontalen Doppelzeile

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & -\frac{a_1}{a_0} & & 0 & & 0 & \cdot & & 0 & \\
0 & & \frac{a_2}{a_1} & & \frac{a_3}{a_2} & & \cdot & \frac{a_n}{a_{n-1}} & & 0
\end{array}$$

und bestimmt beginnend in der rechten oberen Ecke die Schrägzeilen nach den Rhombenregeln (siehe 3.14 „Der QD-Algorithmus für tridiagonale Matrizen"), so hat die zu einer vollständigen Schrägzeile gehörige Tridiagonalmatrix das gegebene Polynom zum charakteristischen Polynom. Das Programm führt nach Bestimmung der ersten vollständigen Schrägzeile eine vorzugebende Anzahl N von QD-Schritten durch; dann erfolgt die Ausgabe von $e_1^{(N)}, \ldots, e_{n-1}^{(N)};\ q_1^{(N)}, \ldots, q_n^{(N)}$. Sind die Nullstellen von pol (λ) paarweise von verschiedenem Betrag, so konvergieren die e_k gegen Null und die q_k gegen die Nullstellen von pol (λ). Wird im Verlauf der Rechnung eines der q_k zu Null, so hält das Programm und der Rechner zeigt dies durch eine blinkende Anzeige an. Die Ausgabe der momentanen $e_1^{(i)}, \ldots, e_{n-1}^{(i)};\ q_1^{(i)}, \ldots, q_n^{(i)}$ erfolgt dann nach Drücken der Taste C.

Beachte: a_0 ist der Koeffizient von λ^n!

Programminstruktionen

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
1	Magnetkarte einlesen (Block 1, 2)			2
2	Programmbeginn		A	0
3	Eingabe von $a_0, a_1, \ldots, a_n$	a_0	R/S	1
		a_1	R/S	2
		⋮	⋮	⋮
		a_n	R/S	n+1

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
4	Ende der Koeffizienteneingabe		B	n+1
5	Eingabe von n und N	n	R/S	0
		N	R/S	
6	Ergebnisanzeige			$e_1^{(N)}$
			R/S	$e_2^{(N)}$
			⋮	⋮
			R/S	$e_{n-1}^{(N)}$
			R/S	$q_1^{(N)}$
			⋮	⋮
			R/S	$q_n^{(N)}$

Registerinhalte

$R_{00}, \ldots, R_{10}$: Programmzeiger
$R_{11}, \ldots, R_{n+11}$: $a_0, a_1, \ldots, a_n$
$R_{n+12}, \ldots, R_{2n+10}$: $e_1, \ldots, e_{n-1}$
$R_{2n+11}, \ldots, R_{3n+10}$: $q_1, \ldots, q_n$

Beispiel

Es sollen mit $N = 5$ QD-Schritten Näherungen für die Nullstellen von

$$\mathrm{pol}\,(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 4\lambda - 2$$

bestimmt werden.

Anmerkungen		Eingabe	Taste	Anzeige
Magnetkarte einlesen (Block 1, 2)				2
Programmbeginn			A	0
Eingabe von:	a_0	−1	R/S	1
	a_1	3	R/S	2
	a_2	4	R/S	3
	a_3	−2	R/S	4
Ende der Koeffizienteneingabe			B	4
Eingabe von:	n	3	R/S	0
	N	5	R/S	
Anzeige von:	e_1			−.0063368755
	e_2		R/S	−.0003864977
	q_1		R/S	3.899866489
	q_2		R/S	−1.290529036
	q_3		R/S	.3973859207

Programm 3.15	Der QD-Algorithmus für Polynome

```
76 LBL
11  A
00  0
42 STO
00  00
01  1
01  1
42 STO
01  01
76 LBL
33 X²
43 RCL
00  00
91 R/S
72 ST*
01  01
01  1
44 SUM
00  00
44 SUM
01  01
61 GTO
33 X²
76 LBL
12  B
91 R/S
42 STO
00  00
75  -
01  1
95  =
42 STO
01  01
25 CLR
91 R/S
42 STO
06  06
02  2
65  ×
43 RCL
00  00
85  +
01  1
01  1
95  =
42 STO
02  02
43 RCL
12  12
55  ÷
43 RCL
11  11
94 +/-
95  =
72 ST*
02  02
43 RCL
00  00
85  +
01  1
01  1
95  =
42 STO
02  02
75  -
01  1
95  =
42 STO
03  03
85  +
43 RCL
00  00
95  =
42 STO
04  04
76 LBL
34 ΓX
73 RC*
02  02
55  ÷
73 RC*
03  03
95  =
72 ST*
04  04
02  2
65  ×
43 RCL
00  00
85  +
01  1
01  1
85  +
43 RCL
01  01
95  =
42 STO
10  10
85  +
01  1
95  =
42 STO
09  09
43 RCL
00  00
85  +
01  1
02  2
85  +
43 RCL
01  01
95  =
42 STO
07  07
75  -
01  1
95  =
42 STO
08  08
43 RCL
00  00
75  -
01  1
75  -
43 RCL
01  01
95  =
42 STO
05  05
67  EQ
22 INV
76 LBL
35 1/X
73 RC*
07  07
75  -
73 RC*
08  08
95  =
74 SM*
10  10
73 RC*
10  10
50 I×I
67  EQ
99 PRT
73 RC*
09  09
55  ÷
73 RC*
10  10
95  =
64 PD*
07  07
01  1
44 SUM
10  10
44 SUM
07  07
44 SUM
08  08
44 SUM
09  09
97 DSZ
05  05
35 1/X
76 LBL
22 INV
73 RC*
08  08
22 INV
74 SM*
10  10
01  1
94 +/-
44 SUM
02  02
44 SUM
03  03
44 SUM
04  04
97 DSZ
01  01
34 ΓX
43 RCL
00  00
75  -
01  1
95  =
42 STO
01  01
01  1
01  1
85  +
43 RCL
00  00
95  =
42 STO
02  02
00  0
72 ST*
02  02
76 LBL
14  D
43 RCL
00  00
75  -
01  1
95  =
42 STO
01  01
43 RCL
02  02
85  +
43 RCL
00  00
95  =
42 STO
03  03
85  +
01  1
95  =
42 STO
07  07
43 RCL
02  02
95  =
42 STO
04  04
85  +
01  1
95  =
```

```
232  42 STO     251  73 RC*     270  22 INV     289  02  02
233  05  05     252  03  03     271  74 SM*     290  85  +
234  76 LBL     253  95  =      272  03  03     291  01  1
235  23 LNX     254  64 PD*     273  97 DSZ     292  95  =
236  73 RC*     255  05  05     274  06  06     293  42 STO
237  05  05     256  01  1      275  14  D      294  04  04
238  75  -      257  44 SUM     276  76 LBL     295  76 LBL
239  73 RC*     258  03  03     277  13  C      296  24 CE
240  04  04     259  44 SUM     278  25 CLR     297  73 RC*
241  95  =      260  04  04     279  02  2      298  04  04
242  74 SM*     261  44 SUM     280  65  x      299  91 R/S
243  03  03     262  05  05     281  43 RCL     300  01  1
244  73 RC*     263  44 SUM     282  00  00     301  44 SUM
245  03  03     264  07  07     283  75  -      302  04  04
246  67  EQ     265  97 DSZ     284  01  1      303  97 DSZ
247  99 PRT     266  01  01     285  95  =      304  03  03
248  73 RC*     267  23 LNX     286  42 STO     305  24 CE
249  07  07     268  73 RC*     287  03  03     306  91 R/S
250  55  ÷      269  04  04     288  43 RCL
```

4 Interpolation und diskrete Approximation

4.1 Lagrange-Interpolation

Zu gegebenen Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ bilden die Lagrange-Polynome

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0) \ldots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \ldots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \ldots (x_i - x_n)}$$

eine Basis im Vektorraum der Polynome bis zum Grad n. Es ist

$$l_i(x_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \\ & \text{für} \\ 0 & \end{cases} \begin{matrix} i = k \\ \\ i \neq k \end{matrix}$$

Sind zu den Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ Stützwerte $f_0, \ldots, f_n$ gegeben, dann hat das Interpolationspolynom durch die Knoten (x_i, f_i) die Form

(*) $\quad \mathrm{pol}(x) = f_0 \cdot l_0(x) + \ldots + f_n \cdot l_n(x)$, $\quad$ denn es ist

$$\mathrm{pol}(x_k) = \sum_{i=0}^{n} f_i \cdot l_i(x_k) = \sum_{i=0}^{n} f_i \cdot \delta_{ik} = f_k \, .$$

Das Programm liefert den Wert des Interpolationspolynoms an der Stelle x durch Auswerten von (*).

Programminstruktionen

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
1	Magnetkarte einlesen (Block 1)			1
2	Programmbeginn		A	1
3	Eingabe von $n, x_0, \ldots, x_n, f_0, \ldots, f_n$	n	R/S	0
		x_0	R/S	1
		⋮	⋮	⋮
		x_n	R/S	n+1
		f_0	R/S	n+2
		⋮	⋮	⋮
		f_n	R/S	2n+2
4	Ende der Koeffizienteneingabe		B	2n+2
5	Eingabe von x	x	R/S	
6	Ergebnisanzeige			pol (x)

Registerinhalte

$R_{00}, \ldots, R_{06}$: Programmzeiger
$R_{07}, \ldots, R_{n+7}$: $x_0, \ldots, x_n$
$R_{n+8}, \ldots, R_{2n+8}$: $f_0, \ldots, f_n$
$R_{2n+9}, \ldots, R_{3n+9}$: Zwischenergebnisse

Bemerkungen

1. Die Schritte 4 bis 6 der Programminstruktionen lassen sich mit beliebig vielen Argumenten x wiederholen;
2. Wird $x = x_i$ (also eine der Stützstellen) als Argument eingegeben, so hält das Programm und der Rechner zeigt dies durch eine blinkende Anzeige an.

Beispiel

Das durch die Tabelle

x_i	0	1	2
f_i	8	5	4

gegebene Interpolationspolynom soll an den Stellen $x = 3$ und $x' = -1$ ausgewertet werden.

Anmerkungen	Eingabe	Taste	Anzeige
Magnetkarte einlesen (Block 1)			1
Programmbeginn		A	1
Eingabe von: n	2	R/S	0
x_0	0	R/S	1
x_1	1	R/S	2
x_2	2	R/S	3
f_0	8	R/S	4
f_1	5	R/S	5
f_2	4	R/S	6
Ende der Koeffizienteneingabe		B	6
Eingabe von: x	3	R/S	
Anzeige von: pol (x)			5
anderes Argument		B	5
Eingabe von: x'	–1	R/S	
Anzeige von: pol (x')			13

Programm 4.1	**Lagrange-Interpolation**

```
000  76  LBL
001  11   A
002  91  R/S
003  42  STO
004  00   00
005  07   7
006  42  STO
007  01   01
008  00   0
009  42  STO
010  02   02
011  76  LBL
012  33  X²
013  43  RCL
014  02   02
015  91  R/S
016  72  ST*
017  01   01
018  01   1
019  44  SUM
020  01   01
021  44  SUM
022  02   02
023  61  GTO
024  33  X²
025  76  LBL
026  12   B
027  91  R/S
028  42  STO
029  06   06
030  43  RCL
031  00   00
032  85   +
033  01   1
034  95   =
035  42  STO
036  01   01
037  43  RCL
038  00   00
039  65   ×
040  02   2
041  85   +
042  09   9
043  95   =
044  42  STO
045  03   03
046  07   7
047  42  STO
048  04   04
049  76  LBL
050  34  √X
051  43  RCL
052  00   00
053  85   +
054  01   1
055  95   =
056  42  STO
057  02   02
058  01   1
059  72  ST*
060  03   03
061  07   7
062  42  STO
063  05   05
064  76  LBL
065  35  1/X
066  53   (
067  73  RC*
068  04   04
069  75   -
070  73  RC*
071  05   05
072  54   )
073  67   EQ
074  10  E'
075  64  PD*
076  03   03
077  76  LBL
078  10  E'
079  01   1
080  44  SUM
081  05   05
082  97  DSZ
083  02   02
084  35  1/X
085  53   (
086  43  RCL
087  06   06
088  75   -
089  73  RC*
090  04   04
091  54   )
092  65   ×
093  73  RC*
094  03   03
095  95   =
096  67   EQ
097  99  PRT
098  35  1/X
099  72  ST*
100  03   03
101  01   1
102  44  SUM
103  03   03
104  44  SUM
105  04   04
106  97  DSZ
107  01   01
108  34  √X
109  43  RCL
110  00   00
111  85   +
112  01   1
113  95   =
114  42  STO
115  01   01
116  85   +
117  07   7
118  95   =
119  42  STO
120  02   02
121  43  RCL
122  00   00
123  65   ×
124  02   2
125  85   +
126  09   9
127  95   =
128  42  STO
129  03   03
130  00   0
131  42  STO
132  04   04
133  42  STO
134  05   05
135  76  LBL
136  22  INV
137  73  RC*
138  03   03
139  44  SUM
140  05   05
141  65   ×
142  73  RC*
143  02   02
144  95   =
145  44  SUM
146  04   04
147  01   1
148  44  SUM
149  02   02
150  44  SUM
151  03   03
152  97  DSZ
153  01   01
154  22  INV
155  43  RCL
156  05   05
157  22  INV
158  49  PRD
159  04   04
160  43  RCL
161  04   04
162  91  R/S
```

4.2 Das Schema von Neville

Nach dem Lemma von Aitken ergibt sich das Interpolationspolynom $p_{0,\ldots,n}(x)$ durch die Knoten (x_i, f_i), $i = 0, \ldots, n$, durch fortgesetzte lineare Interpolation nach der Rekursion

$$p_{i,\ldots,k}(x) = \frac{(x_k - x)\, p_{i,\ldots,k-1}(x) - (x_i - x)\, p_{i+1,\ldots,k}(x)}{x_k - x_i}.$$

Dabei ist $p_i = f_i$. Das Programm bestimmt den Wert des Interpolationspolynoms an der Stelle x nach dem Schema von Neville.

Programminstruktionen

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
1	Magnetkarte einlesen (Block 1)			1
2	Programmbeginn		A	1
3	Eingabe von $n, x_0, \dots, x_n, f_0, \dots, f_n$	n	R/S	0
		x_0	R/S	1
		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
		x_n	R/S	n+1
		f_0	R/S	n+2
		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
		f_n	R/S	2n+2
4	Ende der Koeffizienteneingabe		B	2n+2
5	Eingabe von x	x	R/S	
6	Anzeige von $p_{0,\dots,n}$			$p_{0,\dots,n}$

Registerinhalte

$R_{00}, \dots, R_{07}$: Programmzeiger
$R_{08}, \dots, R_{n+8}$: $x_0, \dots, x_n$
$R_{n+9}, \dots, R_{2n+9}$: $p_0, \dots, p_n$

Bemerkung

Da die Konstanten $f_0, \dots, f_n$ „überschrieben" werden, läßt sich das Programm nicht zur Auswertung des Interpolationspolynoms an mehreren Stellen verwenden.

Beispiel

Das durch die Tabelle $\begin{array}{c|ccc} x_i & 0 & 1 & 2 \\ \hline f_i & 8 & 5 & 4 \end{array}$ gegebene Interpolationspolynom soll an der Stelle $x = 3$ ausgewertet werden.

Anmerkungen		Eingabe	Taste	Anzeige
Magnetkarte einlesen (Block 1)				1
Programmbeginn			A	1
Eingabe von:	n	2	R/S	0
	x_0	0	R/S	1
	x_1	1	R/S	2
	x_2	2	R/S	3
	f_0	8	R/S	4
	f_1	5	R/S	5
	f_2	4	R/S	6
Ende der Koeffizienteneingabe			B	6
Eingabe von:	x	3	R/S	
Anzeige von:	$p_{0,1,2}$			5

Programm 4.2	**Das Schema von Neville**

```
000  76  LBL
001  11   A
002  91  R/S
003  42  STO
004  00   00
005  08   8
006  42  STO
007  01   01
008  00   0
009  42  STO
010  02   02
011  76  LBL
012  33  X²
013  43  RCL
014  02   02
015  91  R/S
016  72  ST*
017  01   01
018  01   1
019  44  SUM
020  01   01
021  44  SUM
022  02   02
023  61  GTO
024  33  X²
025  76  LBL
026  12   B
027  91  R/S
028  42  STO
029  07   07
030  43  RCL
031  00   00
032  42  STO
033  01   01
034  76  LBL
035  35  1/X
036  43  RCL
037  01   01
038  42  STO
039  02   02
040  43  RCL
041  00   00
042  85   +
043  08   8
044  95   =
045  42  STO
046  03   03
047  07   7
048  85   +
049  43  RCL
050  01   01
051  95   =
052  42  STO
053  04   04
054  02   2
055  65   ×
056  43  RCL
057  00   00
058  85   +
059  08   8
060  95   =
061  42  STO
062  05   05
063  85   +
064  01   1
065  95   =
066  42  STO
067  06   06
068  76  LBL
069  34  ΓX
070  53   (
071  53   (
072  73  RC*
073  03   03
074  75   -
075  43  RCL
076  07   07
077  54   )
078  65   ×
079  73  RC*
080  05   05
081  75   -
082  53   (
083  73  RC*
084  04   04
085  75   -
086  43  RCL
087  07   07
088  54   )
089  65   ×
090  73  RC*
091  06   06
092  54   )
093  54   )
094  55   ÷
095  53   (
096  73  RC*
097  03   03
098  75   -
099  73  RC*
100  04   04
101  54   )
102  95   =
103  72  ST*
104  06   06
105  01   1
106  94  +/-
107  44  SUM
108  03   03
109  44  SUM
110  04   04
111  44  SUM
112  05   05
113  44  SUM
114  06   06
115  97  DSZ
116  02   02
117  34  ΓX
118  97  DSZ
119  01   01
120  35  1/X
121  02   2
122  65   ×
123  43  RCL
124  00   00
125  85   +
126  09   9
127  95   =
128  42  STO
129  01   01
130  73  RC*
131  01   01
132  91  R/S
```

4.3 Entwickeln nach Tschebyscheff-Polynomen

Die Tschebyscheff-Polynome $T_n(x)$ bestimmen sich rekursiv aus den Formeln

$$T_0(x) = 1; \quad T_1(x) = x$$
$$T_{n+1}(x) = 2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x) .$$

Da von allen normierten Polynomen vom Grad $n \geq 1$ das Polynom $2^{1-n}\,T_n(x)$ in $[-1, 1]$ die kleinste Tschebyscheff-Norm besitzt, ist es nützlich, ein gegebenes Polynom

$$\text{pol}(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$$

in Tschebyscheff-Polynomen zu entwickeln, also zu schreiben

$$\text{pol}(x) = a_0 T_0(x) + a_1 T_1(x) + \ldots + a_n T_n(x) .$$

Will man pol (x) nämlich durch ein Polynom vom Grad $n-1$ annähern, so läßt man das letzte Glied der Tschebyscheff-Entwicklung fort; der maximale Fehler ist dann wegen $\|T_n\|_\infty = 1$ auf $[-1, 1]$ gerade $|a_n|$. Das ist die nach der Tschebyscheff-Norm bestmögliche Approximation eines Polynoms vom Grad n durch ein Polynom vom Grad $n-1$.

Das Programm entwickelt Polynome bis zum Grad $n = 15$ in Tschebyscheff-Polynomen und gibt dann die Koeffizienten a_i aus.

Um dieses Programm auf Magnetkarten zu speichern, müssen außer den Programmschritten auch Daten, nämlich die Koeffizienten der Tschebyscheff-Polynome, aufgezeichnet werden. Dazu geht man wie folgt vor:

1. Änderung der Speicherbereichsverteilung auf 100 Datenspeicher mittels der Tastenfolge 10 2nd Op 17.
2. Eingabe der Programmschritte (siehe Programmausdruck).
3. Abspeichern der Konstanten in den jeweiligen Datenspeichern (siehe Ausdruck der Registerinhalte).
4. Beschreiben der Magnetkarten (Block 1, 2, 3, 4).

Programminstruktionen

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
1	Änderung der Speicherbereichsverteilung	10	2nd	
			Op	
		17		159.99
			CLR	0
2	Magnetkarten einlesen (Block 1, 2, 3, 4)			4
3	Programmbeginn		A	0
4	Eingabe von $c_0, c_1, \ldots, c_n$	c_0	R/S	1
		c_1	R/S	2
		⋮	⋮	⋮
		c_n	R/S	n+1

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
5	Ende der Koeffizienteneingabe		B	
6	Ergebnisanzeige			a_0
			R/S	a_1
			⋮	⋮
			R/S	a_n

Registerinhalte

$R_{00}, \ldots, R_{09}$: Programmzeiger
$R_{10}, \ldots, R_{n+10}$: $c_0, \ldots, c_n$
$R_{28}, \ldots, R_{99}$: Koeffizienten der Tschebyscheff-Polynome (siehe Ausdruck der Registerinhalte)

Beispiel

Das Polynom $\text{pol}(x) = 2 - 9x + 4x^2 + 16x^3 + 8x^4$ soll nach Tschebyscheff-Polynomen entwickelt werden.

Anmerkungen	Eingabe	Taste	Anzeige
Änderung der Speicherbereichsverteilung	10	2nd	
		Op	
	17		159.99
		CLR	0
Magnetkarten einlesen (Block 1, 2, 3, 4)			4
Programmbeginn		A	0
Eingabe von: c_0	2	R/S	1
c_1	–9	R/S	2
c_2	4	R/S	3
c_3	16	R/S	4
c_4	8	R/S	5
Ende der Koeffizienteneingabe		B	
Anzeige von: a_0			7
a_1		R/S	3
a_2		R/S	6
a_3		R/S	4
a_4		R/S	1

Die gesuchte Tschebyscheff-Entwicklung lautet also

$$\text{pol}(x) = 7 \cdot T_0(x) + 3 \cdot T_1(x) + 6 \cdot T_2(x) + 4 \cdot T_3(x) + T_4(x)\ .$$

Programm 4.3	**Entwickeln nach Tschebyscheff-Polynomen**

<u>10</u> <u>2nd</u> <u>Op</u> <u>17</u>

Programmteil

000	76	LBL
001	11	A
002	01	1
003	00	0
004	42	STO
005	00	00
006	00	0
007	42	STO
008	01	01
009	76	LBL
010	33	X²
011	43	RCL
012	01	01
013	91	R/S
014	72	ST*
015	00	00
016	01	1
017	44	SUM
018	00	00
019	44	SUM
020	01	01
021	61	GTO
022	33	X²
023	76	LBL
024	12	B
025	75	-
026	01	1
027	95	=
028	42	STO
029	00	00
030	42	STO
031	06	06
032	85	+
033	01	1
034	00	0
035	95	=
036	42	STO
037	03	03
038	42	STO
039	08	08
040	53	(
041	43	RCL
042	00	00
043	55	÷
044	04	4
045	85	+
046	01	1
047	54	)
048	65	×
049	43	RCL
050	00	00
051	85	+
052	02	2
053	08	8
054	95	=
055	42	STO
056	02	02
057	76	LBL
058	13	C
059	73	RC*
060	03	03
061	55	÷
062	73	RC*
063	02	02
064	95	=
065	72	ST*
066	03	03
067	42	STO
068	05	05
069	01	1
070	22	INV
071	44	SUM
072	02	02
073	02	2
074	22	INV
075	44	SUM
076	03	03
077	43	RCL
078	06	06
079	55	÷
080	02	2
081	95	=
082	59	INT
083	42	STO
084	07	07
085	76	LBL
086	35	1/X
087	43	RCL
088	05	05
089	65	×
090	73	RC*
091	02	02
092	95	=
093	22	INV
094	74	SM*
095	03	03
096	01	1
097	22	INV
098	44	SUM
099	02	02
100	02	2
101	22	INV
102	44	SUM
103	03	03
104	97	DSZ
105	07	07
106	35	1/X
107	01	1
108	22	INV
109	44	SUM
110	08	08
111	43	RCL
112	08	08
113	42	STO
114	03	03
115	97	DSZ
116	06	06
117	13	C
118	01	1
119	00	0
120	42	STO
121	09	09
122	76	LBL
123	22	INV
124	73	RC*
125	09	09
126	91	R/S
127	01	1
128	44	SUM
129	09	09
130	61	GTO
131	22	INV
132	91	R/S

Datenteil

0.	00
0.	01
0.	02
0.	03
0.	04
0.	05
0.	06
0.	07
0.	08
0.	09
0.	10
0.	11
0.	12
0.	13
0.	14
0.	15
0.	16
0.	17
0.	18
0.	19
0.	20
0.	21
0.	22
0.	23
0.	24
0.	25
0.	26
0.	27
1.	28
1.	29
-1.	30
2.	31
-3.	32
4.	33
1.	34
-8.	35
8.	36
5.	37
-20.	38
16.	39
-1.	40
18.	41
-48.	42
32.	43
-7.	44
56.	45
-112.	46
64.	47
1.	48
-32.	49
160.	50
-256.	51
128.	52
9.	53
-120.	54
432.	55

-576.	56	2816.	67	-364.	78	39424.	89
256.	57	-2816.	68	2912.	79	-28672.	90
-1.	58	1024.	69	-9984.	80	8192.	91
50.	59	1.	70	16640.	81	-15.	92
-400.	60	-72.	71	-13312.	82	560.	93
1120.	61	840.	72	4096.	83	-6048.	94
-1280.	62	-3584.	73	-1.	84	28800.	95
512.	63	6912.	74	98.	85	-70400.	96
-11.	64	-6144.	75	-1568.	86	92160.	97
220.	65	2048.	76	9408.	87	-61440.	98
-1232.	66	13.	77	-26880.	88	16384.	99

4.4 Ökonomisieren eines Polynoms

Die Tschebyscheff-Entwicklung eines Polynoms ist besonders nützlich, um seinen Grad zu ökonomisieren. Wegen $\|T_n\|_\infty = 1$ in $[-1, 1]$ ist der maximale Fehler, der durch Fortlassen des letzten Gliedes entsteht, höchstens $|a_n|$. Will man das Polynom

$$\text{pol}(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$$

durch ein Polynom möglichst niedrigen Grades approximieren und dabei höchstens den Fehler $\epsilon > 0$ begehen, so streicht man in der Tschebyscheff-Entwicklung

$$\text{pol}(x) = a_0 T_0(x) + \ldots + a_n T_n(x)$$

solange das jeweils letzte Glied, bis

$$\sum_{i=k}^{n} |a_i| > \epsilon$$

ist.

Das Approximationspolynom ist dann

$$\text{app}(x) = \text{pol}(x) - \sum_{i=k+1}^{n} a_i T_i(x) = \sum_{i=1}^{k} b_i x^i$$

mit dem Grad k. Das Programm liefert die Koeffizienten b_i von app (x) in der gewöhnlichen Basis $1, x, \ldots, x^k$. Es ökonomisiert Polynome bis zum Grad $n = 15$.

Um dieses Programm auf Magnetkarten zu speichern, müssen außer den Programmschritten auch Daten, nämlich die Koeffizienten der Tschebyscheff-Polynome, aufgezeichnet werden. Dazu geht man wie folgt vor:

1. Änderung der Speicherbereichsverteilung auf 100 Datenspeicher mittels der Tastenfolge 10 2nd Op 17.
2. Eingabe der Programmschritte (siehe Programmausdruck).
3. Abspeichern der Konstanten in den jeweiligen Datenspeichern (siehe Ausdruck der Registerinhalte).
4. Beschreiben der Magnetkarten (Block 1, 2, 3, 4).

Programminstruktionen

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
1	Änderung der Speicherbereichsverteilung	10	2nd	
			Op	
		17		159.99
			CLR	0
2	Magnetkarten einlesen (Block 1, 2, 3, 4)			4
3	Programmbeginn		A	0
4	Eingabe von $\epsilon, c_0, \ldots, c_n$	ϵ	R/S	0
		c_0	R/S	1
		⋮	⋮	⋮
		c_n	R/S	n+1
6	Ende der Koeffizienteneingabe		B	
7	Anzeige von k = Grad app (x)			k
8	Anzeige von $b_0, \ldots, b_k$		R/S	b_0
			⋮	⋮
			R/S	b_k

Registerinhalte

$R_{00}, \ldots, R_{09}$: Programmzeiger
$R_{10}, \ldots, R_{n+10}$: $c_0, \ldots, c_n$
R_{27}: a_i
$R_{28}, \ldots, R_{99}$: Koeffizienten der Tschebyscheff-Polynome
(siehe Ausdruck der Registerinhalte)

Beispiel

Das Polynom $\text{pol}(x) = 1.571\,x - 0.646\,x^3 + 0.08\,x^5$ soll durch ein Polynom app (x) niedrigeren Grades approximiert werden, so daß

$$\|\text{pol}(x) - \text{app}(x)\|_\infty < 0.01$$

ist.

Anmerkungen		Eingabe	Taste	Anzeige
Änderung der Speicherbereichsverteilung		10	2nd Op	
		17		159.99
			CLR	0
Magnetkarten einlesen (Block 1, 2, 3, 4)				4
Programmbeginn			A	0
Eingabe von:	ϵ	0.01	R/S	0
	c_0	0	R/S	1
	c_1	1.571	R/S	2
	c_2	0	R/S	3
	c_3	–0.646	R/S	4
	c_4	0	R/S	5
	c_5	0.08	R/S	6
Ende der Koeffizienteneingabe			B	
Anzeige von:	k			3
	b_0		R/S	0
	b_1		R/S	1.546
	b_2		R/S	0
	b_3		R/S	–0.546

Also ist $\mathrm{app}(x) = 1.546\,x - 0.546\,x^3$.

Programm 4.4	**Ökonomisieren eines Polynoms**
10 2nd Op 17	

Programmteil

```
000  76 LBL
001  11  A
002  01  1
003  00  0
004  42 STO
005  00  00
006  00  0
007  42 STO
008  01  01
009  42 STO
010  27  27
011  91 R/S
012  32 X:T
013  43 RCL
014  01  01
015  91 R/S
016  72 ST*
017  00  00
018  01  1
019  44 SUM
020  00  00
021  44 SUM
022  01  01
023  61 GTO
024  00  00
025  13  13
026  76 LBL
027  12  B
028  75  -
029  01  1
030  95  =
031  42 STO
032  00  00
033  42 STO
034  06  06
035  85  +
036  01  1
037  00  0
038  95  =
039  42 STO
040  03  03
041  42 STO
042  08  08
043  53  (
044  43 RCL
045  00  00
046  55  ÷
047  04  4
048  85  +
049  01  1
050  54  )
051  65  ×
052  43 RCL
053  00  00
054  85  +
055  02  2
056  08  8
057  95  =
058  42 STO
059  02  02
060  76 LBL
061  13  C
062  73 RC*
063  03  03
064  55  ÷
065  73 RC*
066  02  02
067  95  =
```

```
068  72 ST*
069  03  03
070  42 STO
071  05  05
072  50 I×I
073  44 SUM
074  27  27
075  43 RCL
076  27  27
077  77  GE
078  34 ΓX
079  01  1
080  22 INV
081  44 SUM
082  02  02
083  02  2
084  22 INV
085  44 SUM
086  03  03
087  43 RCL
088  06  06
089  55  ÷
090  02  2
091  95  =
092  59 INT
093  42 STO
094  07  07
095  76 LBL
096  35 1/X
097  43 RCL
098  05  05
099  65  ×
100  73 RC*
101  02  02
102  95  =
103  22 INV
104  74 SM*
105  03  03
106  01  1
107  22 INV
108  44 SUM
109  02  02
110  02  2
111  22 INV
112  44 SUM
113  03  03
114  97 DSZ
115  07  07
116  35 1/X
117  01  1
118  22 INV
119  44 SUM
120  08  08
121  43 RCL
122  08  08
123  42 STO
124  03  03
125  97 DSZ
126  06  06
127  13  C
128  16 A'
129  76 LBL
130  17 B'
131  01  1
132  00  0
133  42 STO
134  09  09
135  76 LBL
136  22 INV
137  73 RC*
138  09  09
139  91 R/S
140  01  1
141  44 SUM
142  09  09
143  97 DSZ
144  06  06
145  22 INV
146  91 R/S
147  76 LBL
148  34 ΓX
149  73 RC*
150  02  02
151  64 PD*
152  03  03
153  43 RCL
154  06  06
155  91 R/S
156  01  1
157  44 SUM
158  06  06
159  17 B'
```

Datenteil

0.	00	0.	25	160.	50	-6144.	75
0.	01	0.	26	-256.	51	2048.	76
0.	02	0.	27	128.	52	13.	77
0.	03	1.	28	9.	53	-364.	78
0.	04	1.	29	-120.	54	2912.	79
0.	05	-1.	30	432.	55	-9984.	80
0.	06	2.	31	-576.	56	16640.	81
0.	07	-3.	32	256.	57	-13312.	82
0.	08	4.	33	-1.	58	4096.	83
0.	09	1.	34	50.	59	-1.	84
0.	10	-8.	35	-400.	60	98.	85
0.	11	8.	36	1120.	61	-1568.	86
0.	12	5.	37	-1280.	62	9408.	87
0.	13	-20.	38	512.	63	-26880.	88
0.	14	16.	39	-11.	64	39424.	89
0.	15	-1.	40	220.	65	-28672.	90
0.	16	18.	41	-1232.	66	8192.	91
0.	17	-48.	42	2816.	67	-15.	92
0.	18	32.	43	-2816.	68	560.	93
0.	19	-7.	44	1024.	69	-6048.	94
0.	20	56.	45	1.	70	28800.	95
0.	21	-112.	46	-72.	71	-70400.	96
0.	22	64.	47	840.	72	92160.	97
0.	23	1.	48	-3584.	73	-61440.	98
0.	24	-32.	49	6912.	74	16384.	99

4.5 Methode der kleinsten Quadrate

Bei der diskreten Approximation der Funktion f durch ein Polynom vom Grad n im Intervall $[-1, 1]$ wird die Genauigkeit möglicherweise erhöht, wenn man die Anzahl der stützenden Punkte (x_i, f_i) auf $m + 1$ mit $m > n$ erhöht. Wählt man die Tschebyscheff-Polynome $T_0(x), \dots, T_n(x)$ als Approximationsfunktionen und sind die Stützstellen $x_0, \dots, x_m$ die Nullstellen des Tschebyscheff-Polynoms $T_{m+1}(x)$, so ergibt sich wegen der Orthogonalität der Tschebyscheff-Polynome das folgende besonders einfache Gleichungssystem für die Koeffizienten a_i der Approximation $\mathrm{pol}(x) = a_0T_0(x) + \dots + a_nT_n(x)$:

$$\begin{bmatrix} m+1 & & & 0 \\ & \frac{m+1}{2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{m+1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_0(x_0) & \dots & T_0(x_m) \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ T_n(x_0) & \dots & T_n(x_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_m) \end{bmatrix}$$

In der Tabelle unten sind diejenigen Paare (n, m) mit + gekennzeichnet, für die der Speicherplatz ausreicht. Wird der Rechner mittels der Tastenfolge 7 2nd Op 17 auf 70 Datenspeicher umgeschaltet, wird die Approximation auch für die mit o gekennzeichneten (n, m) berechnet.

n \ m	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	+	+	+	+	+	+	+	o	o
2		+	+	+	+	+	+	o	o
3			+	+	+	o	o		
4				+	o				

Programminstruktionen

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
1	Magnetkarte einlesen (block 1, 2)			2
2	Programmbeginn		A	2
3	Eingabe von n und m	n	R/S	n
		m	R/S	m
4	Eingabe der Nummer des ersten zu belegenden Speicherplatzes $k \geq 12$	k	R/S	0

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
5	Eingabe von $x_0, \dots, x_m, f_0, \dots, f_m$	x_0	R/S	1
		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
		x_m	R/S	m+1
		f_0	R/S	m+2
		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
		f_m	R/S	2m+2
6	Ende der Koeffizienteneingabe		B	
7	Ergebnisanzeige			a_0
			R/S	a_1
			$\vdots$	$\vdots$
			R/S	a_n

Registerinhalte

$R_{00}, \dots, R_{11}$: Programmzeiger
$R_k, \dots, R_{k+n}$: $a_0, \dots, a_n$
$R_{k+n+1}, \dots, R_{k+n+m+1}$: $x_0, \dots, x_m$
$R_{k+n+m+2}, \dots, R_{k+n+2m+2}$: $f_0, \dots, f_m$
$R_{k+n+2m+3}, \dots, R_{k+2n+3m+nm+3}$: $T_0(x_0), \dots, T_n(x_m)$

Bemerkungen

1. Ist $f(x)$ nicht auf $[-1, 1]$, sondern auf $[a, b]$ definiert, so ist $f(x)$ nach $f(t)$ mit

$$t = \frac{2x - a - b}{b - a}$$

zu transformieren.

2. Die Nullstellen von $T_{m+1}(x)$ sind

$$x_j = \cos \frac{2j+1}{m+1} \frac{\pi}{2}; \quad j = 0, \dots, m$$

Beispiel

Die Funktion $\sin \frac{\pi}{2} x$ in $[-1, 1]$ soll durch ein Polynom vom Grad $n = 3$ approximiert werden. Zur Verfügung stehen die Funktionswerte an den Nullstellen von $T_5(x)$:

x_j	−.951	−.588	0	.588	.951
f_j	−.997	−.798	0	.798	.997

Anmerkungen		Eingabe	Taste	Anzeige
Magnetkarte einlesen (Block 1, 2)				2
Programmbeginn			A	2
Eingabe von:	n	3	R/S	3
	m	4	R/S	4
	k	12	R/S	0
	x_0	–.951	R/S	1
	x_1	–.588	R/S	2
	x_2	0	R/S	3
	x_3	.588	R/S	4
	x_4	.951	R/S	5
	f_0	–.997	R/S	6
	f_1	–.798	R/S	7
	f_2	0	R/S	8
	f_3	.798	R/S	9
	f_4	.997	R/S	10
Ende der Koeffizienteneingabe			B	
Anzeige von:	a_0			0
	a_1		R/S	1.1338968
	a_2		R/S	0
	a_3		R/S	–.1385336717

Programm 4.5	**Methode der kleinsten Quadrate**

```
000  76  LBL
001  11   A
002  47  CMS
003  29  CP
004  91  R/S
005  42  STO
006  00   00
007  91  R/S
008  42  STO
009  01   01
010  91  R/S
011  42  STO
012  02   02
013  85   +
014  43  RCL
015  00   00
016  85   +
017  01   1
018  95   =
019  42  STO
020  03   03
021  00   0
022  42  STO
023  04   04
024  76  LBL
025  22  INV
026  43  RCL
027  04   04
028  91  R/S
029  72  ST*
030  03   03
031  01   1
032  44  SUM
033  03   03
034  44  SUM
035  04   04
036  61  GTO
037  22  INV
038  76  LBL
039  12   B
040  43  RCL
041  00   00
042  85   +
043  01   1
044  95   =
045  42  STO
046  04   04
047  76  LBL
048  23  LNX
049  43  RCL
050  02   02
051  85   +
052  43  RCL
053  00   00
054  75   -
055  43  RCL
056  04   04
057  95   =
058  42  STO
059  05   05
060  00   0
061  72  ST*
062  05   05
063  01   1
064  44  SUM
065  05   05
066  72  ST*
067  05   05
068  43  RCL
069  02   02
070  85   +
071  43  RCL
072  00   00
073  85   +
074  01   1
075  95   =
076  42  STO
077  05   05
078  85   +
079  02   2
080  65   ×
081  43  RCL
082  01   01
083  85   +
084  03   3
085  85   +
086  43  RCL
087  00   00
088  75   -
089  43  RCL
090  04   04
091  95   =
```

```
092  42  STO
093  06   06
094  43  RCL
095  01   01
096  85   +
097  01   1
098  95   =
099  42  STO
100  07   07
101  76  LBL
102  24  CE
103  43  RCL
104  00   00
105  42  STO
106  08   08
107  00   0
108  42  STO
109  09   09
110  43  RCL
111  02   02
112  85   +
113  43  RCL
114  00   00
115  95   =
116  42  STO
117  10   10
118  73  RC*
119  10   10
120  42  STO
121  11   11
122  01   1
123  22  INV
124  44  SUM
125  10   10
126  76  LBL
127  25  CLR
128  43  RCL
129  09   09
130  94  +/-
131  85   +
132  02   2
133  65   ×
134  73  RC*
135  05   05
136  65   ×
137  43  RCL
138  11   11
139  85   +
140  73  RC*
141  10   10
142  95   =
143  42  STO
144  03   03
145  43  RCL
146  08   08
147  75   -
148  01   1
149  95   =
150  67   EQ
151  32  X:T
152  43  RCL
153  11   11
154  42  STO
155  09   09
156  43  RCL
157  03   03
158  42  STO
159  11   11
160  01   1
161  22  INV
162  44  SUM
163  10   10
164  97  DSZ
165  08   08
166  25  CLR
167  76  LBL
168  32  X:T
169  53   (
170  43  RCL
171  03   03
172  75   -
173  43  RCL
174  09   09
175  85   +
176  73  RC*
177  02   02
178  54   )
179  55   ÷
180  02   2
181  95   =
182  72  ST*
183  06   06
184  01   1
185  44  SUM
186  05   05
187  85   +
188  43  RCL
189  00   00
190  95   =
191  44  SUM
192  06   06
193  97  DSZ
194  07   07
195  24  CE
196  97  DSZ
197  04   04
198  23  LNX
199  43  RCL
200  02   02
201  85   +
202  43  RCL
203  00   00
204  95   =
205  42  STO
206  03   03
207  00   0
208  72  ST*
209  03   03
210  43  RCL
211  00   00
212  85   +
213  01   1
214  95   =
215  42  STO
216  03   03
217  76  LBL
218  33  X^2
219  43  RCL
220  02   02
221  85   +
222  43  RCL
223  00   00
224  85   +
225  43  RCL
226  01   01
227  85   +
228  02   2
229  95   =
230  42  STO
231  04   04
232  85   +
233  43  RCL
234  01   01
235  85   +
236  02   2
237  85   +
238  43  RCL
239  00   00
240  75   -
241  43  RCL
242  03   03
243  95   =
244  42  STO
245  05   05
246  43  RCL
247  02   02
248  85   +
249  43  RCL
250  00   00
251  85   +
252  01   1
253  75   -
254  43  RCL
255  03   03
256  95   =
257  42  STO
258  06   06
259  43  RCL
260  01   01
261  85   +
262  01   1
263  95   =
264  42  STO
265  07   07
266  76  LBL
267  34  ΓX
268  73  RC*
269  04   04
270  65   ×
271  73  RC*
272  05   05
273  95   =
274  74  SM*
275  06   06
276  01   1
277  44  SUM
278  04   04
279  85   +
280  43  RCL
281  00   00
282  95   =
283  44  SUM
284  05   05
285  97  DSZ
286  07   07
287  34  ΓX
288  97  DSZ
289  03   03
290  33  X^2
291  02   2
292  22  INV
293  64  PD*
294  02   02
295  02   2
296  55   ÷
297  53   (
298  43  RCL
299  01   01
300  85   +
301  01   1
302  54   )
303  95   =
304  42  STO
305  03   03
306  43  RCL
307  00   00
308  85   +
309  01   1
310  95   =
311  42  STO
312  04   04
313  43  RCL
314  02   02
315  42  STO
316  05   05
317  76  LBL
318  35  1/X
319  43  RCL
320  03   03
321  64  PD*
322  05   05
323  01   1
324  44  SUM
325  05   05
326  97  DSZ
327  04   04
328  35  1/X
329  43  RCL
330  02   02
331  42  STO
332  03   03
333  43  RCL
334  00   00
335  85   +
336  01   1
337  95   =
338  42  STO
339  04   04
340  76  LBL
341  42  STO
342  73  RC*
343  03   03
344  91  R/S
345  01   1
346  44  SUM
347  03   03
348  97  DSZ
349  04   04
350  42  STO
351  91  R/S
```

4.6 Der Algorithmus von Clenshaw

Ist das Polynom

$$\text{pol}(x) = a_0 T_0(x) + \ldots + a_n T_n(x)$$

als Linearkombination von Tschebyscheff-Polynomen gegeben, so liefert das Programm den Wert des Polynoms an einer Stelle $x = x_0$.

Programminstruktionen

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
1	Magnetkarte einlesen (Block 1)			1
2	Programmbeginn		A	0
3	Eingabe von $a_0, \ldots, a_n$	a_0	R/S	1
		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
		a_n	R/S	n+1
4	Ende der Koeffizienteneingabe		B	n
5	Eingabe von x_0	x_0	R/S	
6	Ergebnisanzeige			pol (x_0)
7	anderes Argument		C	pol (x_0)
8	Eingabe von x_1	x_1	R/S	
9	Ergebnisanzeige			pol (x_1)

Registerinhalte

$R_{00}, \ldots, R_{06}$: Programmzeiger
$R_{07}, \ldots, R_{n+7}$: $a_0, \ldots, a_n$

Bemerkung

Die Schritte 7 bis 9 der Programminstruktionen lassen sich beliebig oft wiederholen.

Beispiel

Das Polynom

$$\text{pol}(x) = 7\,T_0(x) + 3\,T_1(x) + 6\,T_2(x) + 4\,T_3(x) + T_4(x)$$

soll an den Stellen $x_0 = 1.5$ und $x_1 = -1.5$ ausgewertet werden.

Anmerkungen	Eingabe	Taste	Anzeige
Magnetkarte einlesen (Block 1)			1
Programmbeginn		A	0
Eingabe von: a_0	7	R/S	1
a_1	3	R/S	2
a_2	6	R/S	3
a_3	4	R/S	4
a_4	1	R/S	5
Ende der Koeffizienteneingabe		B	4
Eingabe von: x_0	1.5	R/S	
Anzeige von: pol (x_0)			92
anderes Argument		C	92
Eingabe von: x_1	−1.5	R/S	
Anzeige von: pol (x_1)			11

Programm 4.6	**Der Algorithmus von Clenshaw**

```
000  76 LBL
001  11  A
002  07  7
003  42 STO
004  00  00
005  00  0
006  42 STO
007  01  01
008  76 LBL
009  33 X²
010  43 RCL
011  01  01
012  91 R/S
013  72 ST*
014  00  00
015  01  1
016  44 SUM
017  00  00
018  44 SUM
019  01  01
020  61 GTO
021  33 X²
022  76 LBL
023  12  B
024  75  -
025  01  1
026  95  =
027  42 STO
028  00  00
029  76 LBL
030  13  C
031  91 R/S
032  42 STO
033  03  03
034  43 RCL
035  00  00
036  42 STO
037  02  02
038  00  0
039  42 STO
040  06  06
041  43 RCL
042  00  00
043  85  +
044  07  7
045  95  =
046  42 STO
047  01  01
048  73 RC*
049  01  01
050  42 STO
051  05  05
052  01  1
053  22 INV
054  44 SUM
055  01  01
056  76 LBL
057  34 ΓX
058  43 RCL
059  06  06
060  94 +/-
061  85  +
062  02  2
063  65  ×
064  43 RCL
065  03  03
066  65  ×
067  43 RCL
068  05  05
069  85  +
070  73 RC*
071  01  01
072  95  =
073  42 STO
074  04  04
075  43 RCL
076  02  02
077  75  -
078  01  1
079  95  =
080  67  EQ
081  22 INV
082  43 RCL
083  05  05
084  42 STO
085  06  06
086  43 RCL
087  04  04
088  42 STO
089  05  05
090  01  1
091  22 INV
092  44 SUM
093  01  01
094  97 DSZ
095  02  02
096  34 ΓX
097  76 LBL
098  22 INV
099  53  (
100  43 RCL
101  04  04
102  75  -
103  43 RCL
104  06  06
105  85  +
106  43 RCL
107  07  07
108  54  )
109  55  ÷
110  02  2
111  95  =
112  91 R/S
```

4.7 De Castlejau

Die Bernstein-Polynome vom Grad n

$$B_r^n(\lambda) = \binom{n}{r}(1-\lambda)^{n-r}\lambda^r; \qquad r = 0, \ldots, n$$

bilden eine Basis für die Polynome bis zum Grad n im Intervall [0, 1]. Ein in Bernstein-Polynomen entwickeltes Polynom

$$\mathrm{pol}(\lambda) = b_0 B_0^n(\lambda) + \ldots + b_n B_n^n(\lambda)$$

heißt Bezier-Polynom, die Koeffizienten b_i heißen Bezier-Punkte. Nach de Castlejau berechnet sich der Wert

$$b_{r,\ldots,s}(\lambda) = \sum_{i=r}^{s} b_i B_{i-r}^{s-r}(\lambda)$$

des Bezier-Polynoms vom Grad $s-r$ zu den Bezier-Punkten $b_r, \ldots, b_s$ an der Stelle λ nach der Rekursion

$$b_{r,\ldots,s} = (1-\lambda)\, b_{r,\ldots,s-1} + \lambda b_{r+1,\ldots,s}\,.$$

Programminstruktionen

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
1	Magnetkarte einlesen (Block 1)			1
2	Programmbeginn		A	1
3	Eingabe von r und s	r	R/S	r
		s	R/S	r
4	Eingabe von $b_r, \ldots, b_s$	b_r	R/S	r+1
		b_{r+1}	R/S	r+2
		⋮	⋮	⋮
		b_s	R/S	s+1
5	Ende der Koeffizienteneingabe		B	s+1
6	Eingabe von λ	λ	R/S	
7	Ergebnisanzeige			$b_{r,\ldots,s}$

Registerinhalte

$R_{00}, \ldots, R_{07}$: Programmzeiger
$R_{08}, \ldots, R_{s-r+8}$: $b_r, \ldots, b_s$

Bemerkung

Die $b_r, \dots, b_s$ werden „überschrieben"; daher ist die Auswertung an nur einer Stelle λ möglich.

Beispiel

Das Bezier-Polynom

$$\text{pol}(\lambda) = 2\,B_0^3(\lambda) + 3\,B_1^3(\lambda) + 4\,B_2^3(\lambda) + 2\,B_3^3(\lambda)$$

ist an der Stelle $\lambda = 1/3$ auszuwerten.

Anmerkungen	Eingabe	Taste	Anzeige
Magnetkarte einlesen (Block 1)			1
Programmbeginn		A	1
Eingabe von: r	0	R/S	0
s	3	R/S	0
b_0	2	R/S	1
b_1	3	R/S	2
b_2	4	R/S	3
b_3	2	R/S	4
Ende der Koeffizienteneingabe		B	4
Eingabe von: λ	1	÷	
	3	=	.3333333333
		R/S	
Anzeige von: $b_{0,1,2,3}$			2.888888889

Programm 4.7 De Castlejau

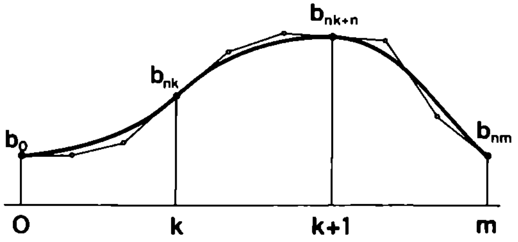
```
000  76 LBL    016  02  02    032  75  -     048  43 RCL
001  11  A     017  91 R/S    033  01  1     049  02  02
002  91 R/S    018  72 ST*    034  95  =     050  42 STO
003  42 STO    019  03  03    035  94 +/-    051  03  03
004  00  00    020  01  1     036  42 STO    052  43 RCL
005  42 STO    021  44 SUM    037  07  07    053  01  01
006  02  02    022  02  02    038  43 RCL    054  75  -
007  91 R/S    023  44 SUM    039  01  01    055  43 RCL
008  42 STO    024  03  03    040  75  -     056  00  00
009  01  01    025  61 GTO    041  43 RCL    057  85  +
010  08  8     026  33 X²     042  00  00    058  07  7
011  42 STO    027  76 LBL    043  95  =     059  95  =
012  03  03    028  12  B     044  42 STO    060  42 STO
013  76 LBL    029  91 R/S    045  02  02    061  05  05
014  33 X²     030  42 STO    046  76 LBL    062  85  +
015  43 RCL    031  06  06    047  35 1/X    063  01  1
```

```
064  95  =
065  42  STO
066  04  04
067  76  LBL
068  34  √X
069  73  RC*
070  04  04
071  65  ×
072  43  RCL
073  06  06
074  85  +
075  73  RC*
076  05  05
077  65  ×
078  43  RCL
079  07  07
080  95  =
081  72  ST*
082  04  04
083  01  1
084  94  +/-
085  44  SUM
086  04  04
087  44  SUM
088  05  05
089  97  DSZ
090  03  03
091  34  √X
092  97  DSZ
093  02  02
094  35  1/X
095  43  RCL
096  01  01
097  75  -
098  43  RCL
099  00  00
100  85  +
101  08  8
102  95  =
103  42  STO
104  05  05
105  73  RC*
106  05  05
107  91  R/S
```

4.8 Bezier-Kurve

Zur Approximation einer Funktion $f(x)$ im Intervall $[0, m]$ ist es günstig, das Intervall durch die Trennstellen $k = 1, 2, \ldots, m-1$ in Segmente aufzuteilen und $f(x)$ in jedem Segment durch ein Bezier-Polynom vom Grad n anzunähern. Dazu wird im Segment $[k, k+1)$ der Parameter $\lambda = x - k$ eingeführt; die Bezier-Punkte dieses Segments bezeichnet man mit $b_{nk}, b_{nk+1}, \ldots, b_{nk+n}$.

Das Programm bestimmt den Wert der aus den Bezier-Polynomen zusammengesetzten Bezier-Kurve bez (x) an der Stelle $x \in [0, m]$ als Wert des Bezier-Polynoms im Segment $[k, k+1)$ an der Stelle $\lambda = x - k$ nach dem Algorithmus von de Castlejau (siehe 4.7 „De Castlejau").



Programminstruktionen

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
1	Magnetkarte einlesen (Block 1)			1
2	Programmbeginn		A	1
3	Eingabe von n und m sowie $b_0, \ldots, b_{nm}$	n	R/S	n
		m	R/S	0
		b_0	R/S	1
		⋮	⋮	⋮
		b_{nm}	R/S	nm+1
5	Ende der Koeffizienteneingabe		B	nm+1
6	Eingabe von x	x	R/S	
7	Ergebnisanzeige			bez (x)

Registerinhalte

$R_{00}, \ldots, R_{09}$: Programmzeiger
$R_{10}, \ldots, R_{nm+10}$: $b_0, \ldots, b_{nm}$

Bemerkung

Die b_i werden „überschrieben"; daher ist die Auswertung von bez (x) an nur einer Stelle x möglich.

Beispiel

Die im Intervall [0, 2] durch die Tabelle

i	0	1	2	3	4	5	6
b_i	4	1	2	3	4	1	3

gegebene Bezier-Kurve vom Grad $n = 3$ soll an der Stelle $x = 1.5$ ausgewertet werden.

Anmerkungen		Eingabe	Taste	Anzeige
Magnetkarte einlesen (Block 1)				1
Programmbeginn			A	1
Eingabe von:	n	3	R/S	3
	m	2	R/S	0
Eingabe von:	b_0	4	R/S	1
	b_1	1	R/S	2
	b_2	2	R/S	3
	b_3	3	R/S	4
	b_4	4	R/S	5
	b_5	1	R/S	6
	b_6	3	R/S	7
Ende der Koeffizienteneingabe			B	7
Eingabe von:	x	1.5	R/S	
Anzeige von:	bez (x)			2.625

Programm 4.8	Bezier-Kurve

000	76	LBL	036	67	EQ	072	43	RCL	108	73	RC*
001	11	A	037	13	C	073	02	02	109	07	07
002	91	R/S	038	43	RCL	074	95	=	110	85	+
003	42	STO	039	00	00	075	42	STO	111	43	RCL
004	00	00	040	65	×	076	01	01	112	01	01
005	91	R/S	041	43	RCL	077	43	RCL	113	65	×
006	42	STO	042	01	01	078	00	00	114	73	RC*
007	01	01	043	85	+	079	75	-	115	06	06
008	01	1	044	01	1	080	43	RCL	116	95	=
009	00	0	045	00	0	081	03	03	117	72	ST*
010	42	STO	046	95	=	082	95	=	118	07	07
011	02	02	047	42	STO	083	42	STO	119	01	1
012	76	LBL	048	04	04	084	04	04	120	94	+/-
013	33	X²	049	73	RC*	085	76	LBL	121	44	SUM
014	43	RCL	050	04	04	086	35	1/X	122	07	07
015	03	03	051	91	R/S	087	43	RCL	123	44	SUM
016	91	R/S	052	76	LBL	088	04	04	124	06	06
017	72	ST*	053	13	C	089	42	STO	125	97	DSZ
018	02	02	054	43	RCL	090	05	05	126	05	05
019	01	1	055	02	02	091	43	RCL	127	34	√X
020	44	SUM	056	59	INT	092	00	00	128	97	DSZ
021	02	02	057	42	STO	093	85	+	129	04	04
022	44	SUM	058	03	03	094	09	9	130	35	1/X
023	03	03	059	22	INV	095	95	=	131	43	RCL
024	61	GTO	060	44	SUM	096	42	STO	132	00	00
025	33	X²	061	02	02	097	06	06	133	85	+
026	76	LBL	062	43	RCL	098	85	+	134	01	1
027	12	B	063	00	00	099	01	1	135	00	0
028	91	R/S	064	49	PRD	100	95	=	136	95	=
029	42	STO	065	03	03	101	42	STO	137	42	STO
030	02	02	066	43	RCL	102	07	07	138	01	01
031	75	-	067	03	03	103	76	LBL	139	73	RC*
032	43	RCL	068	44	SUM	104	34	√X	140	01	01
033	01	01	069	00	00	105	43	RCL	141	91	R/S
034	95	=	070	01	1	106	02	02			
035	22	INV	071	75	-	107	65	×			

4.9 Interpolation durch kubische Splines

Gegeben seien $n+1$ Knoten

$$(x_i, f(x_i)), \qquad i = 0, \ldots, n$$

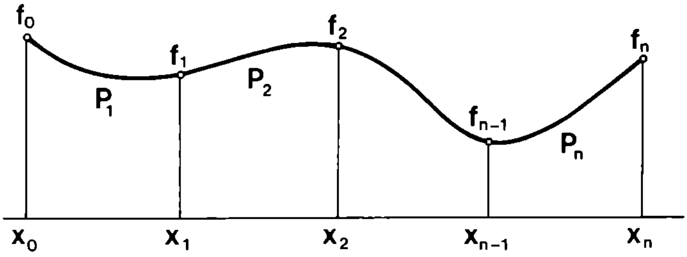
mit äquidistanten Stützstellen $x_i = x_0 + i\,h$, h fest. Stellt man zur Approximation der Funktion f an eine Bezier-Kurve s (siehe 4.8 „Bezier-Kurve") die Forderung der zweimaligen Differenzierbarkeit an den Trennstellen x_i und gibt man zusätzlich die beiden Randbedingungen

$$s''(x_0) = s''(x_n) = 0,$$

so ist s dadurch eindeutig festgelegt. Eine solche Kurve heißt kubischer Interpolationsspline und mit diesen Randbedingungen natürlicher Spline. Das Programm berechnet die Koeffizienten der Polynome

$$P_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$
$$x \in [x_{i-1}, x_i] \qquad i = 1, \ldots, n,$$

aus denen sich s zusammensetzt.



Programminstruktionen

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
1	Magnetkarte einlesen (Block 1, 2)			2
2	Programmbeginn		A	2
3	Eingabe der Nummer des ersten zu belegenden Speicherplatzes $k \geq 9$	k	R/S	0
4	Eingabe von $f(x_0), \ldots, f(x_n)$	$f(x_0)$	R/S	1
		⋮	⋮	⋮
		$f(x_n)$	R/S	n+1
5	Ende der Koeffizienteneingabe		B	n+1
6	Eingabe von h, n und k	h	R/S	h
		n	R/S	n
		k	R/S	
7	Ergebnisanzeige			a_1
			R/S	b_1
			R/S	c_1
			R/S	d_1
			⋮	⋮
			R/S	a_n
			R/S	b_n
			R/S	c_n
			R/S	d_n

Registerinhalte

$R_{00}, \ldots, R_{08}$: Programmzeiger
$R_k, \ldots, R_{k+n}$: $f(x_0), \ldots, f(x_n)$
$R_{k+n+1}, \ldots, R_{k+2n}$: $c_1, \ldots, c_n$
$R_{k+2n+1}, \ldots, R_{k+3n}$: $b_1, \ldots, b_n$
$R_{k+3n+1}, \ldots, R_{k+4n}$: $d_1, \ldots, d_n$
$R_{k+4n+1}, \ldots, R_{k+5n-1}$: Zwischenergebnisse

Bemerkung

Das Programm berechnet kubische Interpolationssplines für bis zu $n = 10$ Segmente.

Beispiel

Die Funktion $f(x) = \sin \pi x$ soll im Intervall [0, 2] interpoliert werden. Es steht folgende Tabelle zur Verfügung

x_i	0	0.5	1	1.5	2
$f(x_i)$	0	1	0	−1	0

Damit ist also $n = 4$ und $h = 0.5$

Anmerkungen		Eingabe	Taste	Anzeige
Magnetkarten einlesen (Block 1, 2)				2
Programmbeginn			A	2
Eingabe von:	k	9	R/S	0
	$f(x_0)$	0	R/S	1
	$f(x_1)$	1	R/S	2
	$f(x_2)$	0	R/S	3
	$f(x_3)$	−1	R/S	4
	$f(x_4)$	0	R/S	5
Ende der Koeffizienteneingabe			B	5
Eingabe von:	h	0.5	R/S	0.5
	n	4	R/S	4
	k	9	R/S	
Anzeige von:	a_1			0
	b_1		R/S	3
	c_1		R/S	0
	d_1		R/S	−4
	a_2		R/S	1
	b_2		R/S	0
	c_2		R/S	−6
	d_2		R/S	4
	a_3		R/S	0
	b_3		R/S	−3
	c_3		R/S	2 −12
	d_3		R/S	4
	a_4		R/S	−1
	b_4		R/S	2 −12
	c_4		R/S	6
	d_4		R/S	−4

Programm 4.9	**Interpolation durch kubische Splines**

000	76	LBL	058	95	=	116	95	=	174	05	05
001	11	A	059	42	STO	117	42	STO	175	73	RC*
002	91	R/S	060	04	04	118	03	03	176	03	03
003	42	STO	061	85	+	119	43	RCL	177	65	×
004	00	00	062	01	1	120	00	00	178	73	RC*
005	00	0	063	95	=	121	75	-	179	04	04
006	42	STO	064	42	STO	122	01	1	180	95	=
007	01	01	065	05	05	123	95	=	181	72	ST*
008	76	LBL	066	01	1	124	42	STO	182	06	06
009	22	INV	067	44	SUM	125	04	04	183	01	1
010	43	RCL	068	06	06	126	76	LBL	184	44	SUM
011	01	01	069	03	3	127	24	CE	185	03	03
012	91	R/S	070	55	÷	128	04	4	186	44	SUM
013	72	ST*	071	43	RCL	129	75	-	187	04	04
014	00	00	072	02	02	130	73	RC*	188	43	RCL
015	01	1	073	33	X^2	131	06	06	189	00	00
016	44	SUM	074	95	=	132	95	=	190	75	-
017	00	00	075	42	STO	133	35	1/X	191	02	2
018	44	SUM	076	07	07	134	72	ST*	192	95	=
019	01	01	077	43	RCL	135	03	03	193	42	STO
020	61	GTO	078	00	00	136	01	1	194	07	07
021	22	INV	079	75	-	137	44	SUM	195	76	LBL
022	76	LBL	080	01	1	138	03	03	196	25	CLR
023	12	B	081	95	=	139	44	SUM	197	73	RC*
024	91	R/S	082	42	STO	140	06	06	198	03	03
025	42	STO	083	08	08	141	97	DSZ	199	75	-
026	02	02	084	76	LBL	142	04	04	200	73	RC*
027	91	R/S	085	23	LNX	143	24	CE	201	06	06
028	42	STO	086	73	RC*	144	43	RCL	202	95	=
029	00	00	087	03	03	145	01	01	203	65	×
030	91	R/S	088	75	-	146	85	+	204	73	RC*
031	42	STO	089	02	2	147	02	2	205	04	04
032	01	01	090	65	×	148	65	×	206	95	=
033	85	+	091	73	RC*	149	43	RCL	207	72	ST*
034	43	RCL	092	04	04	150	00	00	208	05	05
035	00	00	093	85	+	151	85	+	209	71	SBR
036	85	+	094	73	RC*	152	02	2	210	16	A'
037	01	1	095	05	05	153	95	=	211	97	DSZ
038	95	=	096	95	=	154	42	STO	212	07	07
039	42	STO	097	65	×	155	03	03	213	25	CLR
040	03	03	098	43	RCL	156	85	+	214	43	RCL
041	85	+	099	07	07	157	43	RCL	215	01	01
042	43	RCL	100	95	=	158	00	00	216	85	+
043	00	00	101	72	ST*	159	75	-	217	02	2
044	95	=	102	06	06	160	01	1	218	65	×
045	42	STO	103	71	SBR	161	95	=	219	43	RCL
046	06	06	104	16	A'	162	42	STO	220	00	00
047	00	0	105	97	DSZ	163	04	04	221	95	=
048	72	ST*	106	08	08	164	85	+	222	42	STO
049	03	03	107	23	LNX	165	43	RCL	223	03	03
050	72	ST*	108	04	4	166	00	00	224	42	STO
051	06	06	109	35	1/X	167	95	=	225	06	06
052	43	RCL	110	72	ST*	168	42	STO	226	85	+
053	01	01	111	06	06	169	06	06	227	02	2
054	42	STO	112	43	RCL	170	85	+	228	65	×
055	03	03	113	06	06	171	01	1	229	43	RCL
056	85	+	114	85	+	172	95	=	230	00	00
057	01	1	115	01	1	173	42	STO	231	75	-

232	01	1
233	95	=
234	42	STO
235	04	04
236	85	+
237	43	RCL
238	00	00
239	95	=
240	42	STO
241	05	05
242	73	RC*
243	05	05
244	72	ST*
245	03	03
246	01	1
247	94	+/-
248	44	SUM
249	03	03
250	44	SUM
251	05	05
252	44	SUM
253	04	04
254	43	RCL
255	00	00
256	75	-
257	02	2
258	95	=
259	42	STO
260	07	07
261	76	LBL
262	32	X:T
263	73	RC*
264	05	05
265	75	-
266	73	RC*
267	04	04
268	65	×
269	73	RC*
270	06	06
271	95	=
272	72	ST*
273	03	03
274	01	1
275	94	+/-
276	44	SUM
277	03	03
278	44	SUM
279	04	04
280	44	SUM
281	05	05
282	44	SUM
283	06	06
284	97	DSZ
285	07	07
286	32	X:T
287	43	RCL
288	01	01
289	42	STO
290	03	03
291	85	+
292	01	1
293	95	=
294	42	STO
295	04	04
296	85	+
297	43	RCL
298	00	00
299	95	=
300	42	STO
301	05	05
302	85	+
303	01	1
304	95	=
305	42	STO
306	06	06
307	85	+
308	43	RCL
309	00	00
310	95	=
311	42	STO
312	07	07
313	43	RCL
314	00	00
315	42	STO
316	08	08
317	76	LBL
318	34	ΓX
319	53	(
320	73	RC*
321	04	04
322	75	-
323	73	RC*
324	03	03
325	54	)
326	55	÷
327	43	RCL
328	02	02
329	75	-
330	43	RCL
331	02	02
332	65	×
333	53	(
334	73	RC*
335	06	06
336	85	+
337	02	2
338	65	×
339	73	RC*
340	05	05
341	54	)
342	55	÷
343	03	3
344	95	=
345	72	ST*
346	07	07
347	71	SBR
348	16	A'
349	01	1
350	44	SUM
351	07	07
352	97	DSZ
353	08	08
354	34	ΓX
355	43	RCL
356	07	07
357	42	STO
358	03	03
359	43	RCL
360	01	01
361	85	+
362	43	RCL
363	00	00
364	85	+
365	01	1
366	95	=
367	42	STO
368	04	04
369	85	+
370	01	1
371	95	=
372	42	STO
373	05	05
374	43	RCL
375	00	00
376	42	STO
377	06	06
378	76	LBL
379	35	1/X
380	73	RC*
381	05	05
382	75	-
383	73	RC*
384	04	04
385	95	=
386	55	÷
387	03	3
388	55	÷
389	43	RCL
390	02	02
391	95	=
392	72	ST*
393	03	03
394	01	1
395	44	SUM
396	03	03
397	44	SUM
398	04	04
399	44	SUM
400	05	05
401	97	DSZ
402	06	06
403	35	1/X
404	43	RCL
405	01	01
406	42	STO
407	03	03
408	85	+
409	02	2
410	65	×
411	43	RCL
412	00	00
413	85	+
414	02	2
415	95	=
416	42	STO
417	04	04
418	75	-
419	43	RCL
420	00	00
421	75	-
422	01	1
423	95	=
424	42	STO
425	05	05
426	85	+
427	02	2
428	65	×
429	43	RCL
430	00	00
431	85	+
432	01	1
433	95	=
434	42	STO
435	06	06
436	43	RCL
437	00	00
438	42	STO
439	07	07
440	76	LBL
441	42	STO
442	73	RC*
443	03	03
444	91	R/S
445	73	RC*
446	04	04
447	91	R/S
448	73	RC*
449	05	05
450	91	R/S
451	73	RC*
452	06	06
453	91	R/S
454	71	SBR
455	16	A'
456	97	DSZ
457	07	07
458	42	STO
459	91	R/S
460	76	LBL
461	16	A'
462	53	(
463	01	1
464	44	SUM
465	03	03
466	44	SUM
467	04	04
468	44	SUM
469	05	05
470	44	SUM
471	06	06
472	54	)
473	92	RTN

5 Numerische Differentiation und Integration

5.1 Numerische Differentiation

Um näherungsweise die Ableitungen $f^{(k)}$ einer Funktion f an einer Stelle x zu bestimmen, liegt es nahe, f in der Umgebung von x durch ein Stützpolynom vom Grad n mit n+1 äquidistanten Stützstellen $x_i = x_0 + i\,h$, $i = 0, \ldots, n$, anzunähern und dieses zu differenzieren. Das Programm liefert Näherungen für die in der Tabelle aufgeführten Ableitungen

$$f_r^{(k)} := f^{(k)}(x_0 + r\,h) .$$

Anzahl der Stützstellen	Das Programm berechnet Näherungswerte für:		
m = 2	f'_0	$f'_{1/2}$	f'_1
m = 3	f'_0 f''_0	f'_1 f''_1	f'_2 f''_2
m = 4	f'_0 f''_0 f'''_0	$f'_{3/2}$ $f''_{3/2}$ $f'''_{3/2}$	f'_3 f''_3 f'''_3

Einzugeben sind außer den Stützwerten $f_0, \ldots, f_n$ die Zahlen $m := n + 1$, $r := \dfrac{x - x_0}{h}$ und $k :=$ Ordnung der Ableitung sowie h.

Programminstruktionen

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
1	Magnetkarte einlesen (Block 1, 2)			2
2	Programmbeginn		A	0
3	Eingabe von $m, r, k, h, f_0, \ldots, f_n$	m	R/S	1
		r	R/S	2
		k	R/S	3
		h	R/S	4
		f_0	R/S	5
		⋮	⋮	⋮
		f_n	R/S	n+5
4	Ende der Koeffizienteneingabe		B	
5	Ergebnisanzeige			$f_r^{(k)}$

Registerinhalte

$R_{00}, \ldots, R_{08}$: Programmzeiger

Bemerkung

Werden die Zahlen m, r und k in einer Kombination eingegeben, die in der Tabelle nicht auftritt, so hält das Programm und der Rechner zeigt dies durch eine blinkende Anzeige an.

Beispiel

Gesucht ist eine Näherung für die 1. Ableitung der Funktion $f(x) = \sin x$ an der Stelle $\pi/4$. Gegeben ist die Tabelle

x_i	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin x_i$	0	1/2	$\sqrt{3}/2$	1

Es ist also

$$m = 4, \quad r = \frac{x - x_0}{h} = \frac{\pi/4 - 0}{\pi/6} = 1.5, \quad k = 1 \quad \text{und} \quad h = \pi/6\,.$$

Anmerkungen	Eingabe	Taste	Anzeige
Magnetkarte einlesen (Block 1, 2)			2
Programmbeginn		A	0
Eingabe von: m	4	R/S	1
r	1.5	R/S	2
k	1	R/S	3
h		2nd	
		π	3.141592654
		$\div$	
	6	=	.5235987756
		R/S	4
f_0	0	R/S	5
f_1	0.5	R/S	6
f_2	3	$\sqrt{x}$	1.732050808
		$\div$	
	2	=	.8660254038
		R/S	7
f_3	1	R/S	8
Ende der Koeffizienteneingabe		B	
Anzeige von: $f'_{3/2}$			.7068616846

Der exakte Wert ist .7071067812

Programm 5.1	Numerische Differentiation

000	76	LBL	058	95	=	116	55	÷	174	55	÷
001	11	A	059	91	R/S	117	02	2	175	43	RCL
002	00	0	060	76	LBL	118	55	÷	176	03	03
003	42	STO	061	13	C	119	43	RCL	177	33	X²
004	08	08	062	43	RCL	120	03	03	178	95	=
005	42	STO	063	02	02	121	95	=	179	91	R/S
006	09	09	064	75	-	122	91	R/S	180	76	LBL
007	43	RCL	065	01	1	123	76	LBL	181	14	D
008	09	09	066	95	=	124	23	LNX	182	43	RCL
009	91	R/S	067	67	EQ	125	43	RCL	183	02	02
010	72	ST*	068	16	A'	126	04	04	184	75	-
011	08	08	069	43	RCL	127	94	+/-	185	01	1
012	01	1	070	02	02	128	85	+	186	95	=
013	44	SUM	071	75	-	129	43	RCL	187	67	EQ
014	08	08	072	02	2	130	06	06	188	18	C'
015	44	SUM	073	95	=	131	95	=	189	43	RCL
016	09	09	074	67	EQ	132	55	÷	190	02	02
017	61	GTO	075	17	B'	133	02	2	191	75	-
018	00	00	076	61	GTO	134	55	÷	192	02	2
019	07	07	077	99	PRT	135	43	RCL	193	95	=
020	76	LBL	078	76	LBL	136	03	03	194	67	EQ
021	12	B	079	16	A'	137	95	=	195	19	D'
022	29	CP	080	43	RCL	138	91	R/S	196	43	RCL
023	43	RCL	081	01	01	139	76	LBL	197	02	02
024	00	00	082	67	EQ	140	24	CE	198	75	-
025	75	-	083	22	INV	141	43	RCL	199	03	3
026	02	2	084	43	RCL	142	04	04	200	95	=
027	95	=	085	01	01	143	75	-	201	67	EQ
028	67	EQ	086	75	-	144	04	4	202	10	E'
029	15	E	087	01	1	145	65	×	203	61	GTO
030	43	RCL	088	95	=	146	43	RCL	204	99	PRT
031	00	00	089	67	EQ	147	05	05	205	76	LBL
032	75	-	090	23	LNX	148	85	+	206	18	C'
033	03	3	091	43	RCL	149	03	3	207	43	RCL
034	95	=	092	01	01	150	65	×	208	01	01
035	67	EQ	093	75	-	151	43	RCL	209	67	EQ
036	13	C	094	02	2	152	06	06	210	25	CLR
037	43	RCL	095	95	=	153	95	=	211	43	RCL
038	00	00	096	67	EQ	154	55	÷	212	01	01
039	75	-	097	24	CE	155	02	2	213	75	-
040	04	4	098	61	GTO	156	55	÷	214	01	1
041	95	=	099	99	PRT	157	43	RCL	215	93	.
042	67	EQ	100	76	LBL	158	03	03	216	05	5
043	14	D	101	22	INV	159	95	=	217	95	=
044	61	GTO	102	43	RCL	160	91	R/S	218	67	EQ
045	99	PRT	103	04	04	161	76	LBL	219	32	X:T
046	76	LBL	104	65	×	162	17	B'	220	43	RCL
047	15	E	105	03	3	163	43	RCL	221	01	01
048	43	RCL	106	94	+/-	164	04	04	222	75	-
049	04	04	107	85	+	165	75	-	223	03	3
050	94	+/-	108	04	4	166	02	2	224	95	=
051	85	+	109	65	×	167	65	×	225	67	EQ
052	43	RCL	110	43	RCL	168	43	RCL	226	33	X²
053	05	05	111	05	05	169	05	05	227	61	GTO
054	95	=	112	75	-	170	85	+	228	99	PRT
055	55	÷	113	43	RCL	171	43	RCL	229	76	LBL
056	43	RCL	114	06	06	172	06	06	230	25	CLR
057	03	03	115	95	=	173	95	=	231	43	RCL

```
232  04  04
233  65  ×
234  01  1
235  01  1
236  94  +/-
237  85  +
238  43  RCL
239  05  05
240  65  ×
241  01  1
242  08  8
243  75  -
244  43  RCL
245  06  06
246  65  ×
247  09  9
248  85  +
249  43  RCL
250  07  07
251  65  ×
252  02  2
253  95  =
254  55  ÷
255  06  6
256  55  ÷
257  43  RCL
258  03  03
259  95  =
260  91  R/S
261  76  LBL
262  32  X:T
263  43  RCL
264  04  04
265  75  -
266  43  RCL
267  05  05
268  65  ×
269  02  2
270  07  7
271  85  +
272  43  RCL
273  06  06
274  65  ×
275  02  2
276  07  7
277  75  -
278  43  RCL
279  07  07
280  95  =
281  55  ÷
282  02  2
283  04  4
284  55  ÷
285  43  RCL
286  03  03
287  95  =
288  91  R/S
289  76  LBL
290  33  X²
291  43  RCL
292  04  04
293  65  ×
294  02  2
295  94  +/-
296  85  +
297  43  RCL
298  05  05
299  65  ×
300  09  9
301  75  -
302  43  RCL
303  06  06
304  65  ×
305  01  1
306  08  8
307  85  +
308  43  RCL
309  07  07
310  65  ×
311  01  1
312  01  1
313  95  =
314  55  ÷
315  06  6
316  55  ÷
317  43  RCL
318  03  03
319  95  =
320  91  R/S
321  76  LBL
322  19  D'
323  43  RCL
324  01  01
325  67  EQ
326  34  √X
327  43  RCL
328  01  01
329  75  -
330  01  1
331  93  .
332  05  5
333  95  =
334  67  EQ
335  35  1/X
336  43  RCL
337  01  01
338  75  -
339  03  3
340  95  =
341  67  EQ
342  42  STO
343  61  GTO
344  99  PRT
345  76  LBL
346  34  √X
347  43  RCL
348  04  04
349  65  ×
350  02  2
351  75  -
352  43  RCL
353  05  05
354  65  ×
355  05  5
356  85  +
357  43  RCL
358  06  06
359  65  ×
360  04  4
361  75  -
362  43  RCL
363  07  07
364  95  =
365  55  ÷
366  43  RCL
367  03  03
368  33  X²
369  95  =
370  91  R/S
371  76  LBL
372  35  1/X
373  43  RCL
374  04  04
375  75  -
376  43  RCL
377  05  05
378  75  -
379  43  RCL
380  06  06
381  85  +
382  43  RCL
383  07  07
384  95  =
385  55  ÷
386  02  2
387  55  ÷
388  43  RCL
389  03  03
390  33  X²
391  95  =
392  91  R/S
393  76  LBL
394  42  STO
395  43  RCL
396  04  04
397  94  +/-
398  85  +
399  04  4
400  65  ×
401  43  RCL
402  05  05
403  75  -
404  05  5
405  65  ×
406  43  RCL
407  06  06
408  85  +
409  02  2
410  65  ×
411  43  RCL
412  07  07
413  95  =
414  55  ÷
415  43  RCL
416  03  03
417  33  X²
418  95  =
419  91  R/S
420  76  LBL
421  15  E
422  43  RCL
423  04  04
424  94  +/-
425  85  +
426  03  3
427  65  ×
428  43  RCL
429  05  05
430  75  -
431  03  3
432  65  ×
433  43  RCL
434  06  06
435  85  +
436  43  RCL
437  07  07
438  95  =
439  55  ÷
440  43  RCL
441  03  03
442  55  ÷
443  43  RCL
444  03  03
445  33  X²
446  95  =
447  91  R/S
```

5.2 Sehnentrapezsumme

Als Näherung für den Wert $\int_a^b f(x)\,dx$ benutzt man die Sehnentrapezsumme S_N, die man durch Aufteilen des Intervalls [a, b] in 2^N Teilintervalle erhält. Es ist

$$S_N = \frac{b-a}{2^{N+1}}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{2^N-1} f\left(a + i\,\frac{b-a}{2^N}\right)\right).$$

Die Funktion f wird als Unterprogramm eingegeben. Dabei ist folgendes zu beachten:

1. Die Funktionsvorschrift ist in Klammern einzuschließen.
2. Für x ist RCL 00 zu setzen.
3. Die Taste = darf nicht verwendet werden.
4. Die Eingabe der Funktionsvorschrift ist mit INV SBR abzuschließen.

Programminstruktionen

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
1	Magnetkarte einlesen (Block 1)			1
2	Eingabe der Funktionsvorschrift f(x)		GTO	
			x^2	
			LRN	101 00
			(	102 00
			:	: :
			)	XXX 00
			INV	XXX 00
			SBR	XXX 00
			LRN	1
3	Programmbeginn		A	1
4	Eingabe von a, b und N	a	R/S	a
		b	R/S	b
		N	R/S	
5	Ergebnisanzeige			S_N

Registerinhalte

$R_{00}, \ldots, R_{06}$: Programmzeiger

Beispiel

Gesucht ist eine Näherung für $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ mit N = 3.

Anmerkungen	Eingabe	Taste	Anzeige
Magnetkarte einlesen (Block 1)			1
Eingabe der Funktionsvorschrift		GTO	
		x^2	
		LRN	101 00
		(	102 00
		(	103 00
		RCL	104 00
		00	105 00
		x^2	106 00
		+	107 00
		1	108 00
		)	109 00
		1/x	110 00
		)	111 00
		INV	112 00
		SBR	112 00
		LRN	1
Programmbeginn		A	1
Eingabe von: a	0	R/S	0
b	1	R/S	1
N	3	R/S	
Anzeige von: S_N			.7847471236

Es ist I = arctan 1 = .7853981634

Programm 5.2	Sehnentrapezsumme

```
000  76  LBL
001  11   A
002  29  CP
003  91  R/S
004  42  STO
005  00   00
006  42  STO
007  01   01
008  91  R/S
009  42  STO
010  02   02
011  91  R/S
012  42  STO
013  03   03
014  00   0
015  42  STO
016  05   05
017  71  SBR
018  33  X²
019  44  SUM
020  05   05
021  43  RCL
022  02   02
023  42  STO
024  00   00
025  71  SBR
026  33  X²
027  44  SUM
028  05   05
029  02   2
030  22  INV
031  49  PRD
032  05   05
033  53   (
034  02   2
035  45  YX
036  43  RCL
037  03   03
038  54   )
039  52  EE
040  22  INV
041  52  EE
042  35  1/X
043  65   ×
044  53   (
045  43  RCL
046  02   02
047  75   -
048  43  RCL
049  01   01
050  54   )
051  95   =
052  42  STO
053  06   06
054  85   +
055  43  RCL
056  01   01
057  95   =
058  42  STO
059  00   00
060  02   2
061  45  YX
062  43  RCL
063  03   03
064  75   -
065  01   1
066  95   =
067  52  EE
```

```
068  22 INV
069  52 EE
070  42 STO
071  04  04
072  22 INV
073  77  GE
074  13  C
075  67  EQ
076  13  C
077  76 LBL
078  12  B
079  71 SBR
080  33 X²
081  44 SUM
082  05  05
083  43 RCL
084  06  06
085  44 SUM
086  00  00
087  97 DSZ
088  04  04
089  12  B
090  76 LBL
091  13  C
092  43 RCL
093  05  05
094  65  ×
095  43 RCL
096  06  06
097  95  =
098  91 R/S
099  76 LBL
100  33 X²
```

5.3 Romberg-Integration

Betrachtet man zur Approximation des Wertes $\int_a^b f(x)\,dx$ die Folge der Sehnentrapezsummen $S_0, \ldots, S_N$, so läßt sich die Konvergenz dieser Näherungsfolge durch wiederholte Extrapolation nach der Formel

$$S_{i,\ldots,k} = \frac{S_{i+1,\ldots,k} - 4^{k-i} S_{i,\ldots,k-1}}{1 - 4^{k-i}} \qquad k = 1, \ldots, N \quad i = k-1, \ldots, 0$$

beschleunigen. Das Programm liefert als Näherung für das Integral den Wert $S_{0,\ldots,N}$.
Die Funktion f wird als Unterprogramm eingegeben. Dabei ist folgendes zu beachten:

1. Die Funktionsvorschrift f(x) ist in Klammern einzuschließen.
2. Für x ist RCL 00 zu setzen.
3. Die Taste = darf nicht verwendet werden.
4. Die Eingabe der Funktionsvorschrift ist mit INV SBR abzuschließen.

Programminstruktionen

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
1	Magnetkarte einlesen (Block 1)			1
2	Eingabe der Funktionsvorschrift f(x)		GTO	
			x^2	
			LRN	204 00
			(	205 00
			⋮	⋮ ⋮
			)	XXX 00
			INV	XXX 00
			SBR	XXX 00
			LRN	1
3	Programmbeginn		A	1
4	Eingabe von a, b und N	a	R/S	a
		b	R/S	b
		N	R/S	
5	Ergebnisanzeige			$S_{0,\ldots,N}$

Registerinhalte

$R_{00}, \ldots, R_{09}$: Programmzeiger
$R_{10}, \ldots, R_{N+10}$: $S_0, \ldots, S_N$

Bemerkung

Die $S_0, \ldots, S_N$ werden durch die $S_{i, \ldots, k}$ „überschrieben".

Beispiel

Gesucht ist eine Näherung für $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ mit $N = 3$.

Anmerkungen	Eingabe	Taste	Anzeige
Magnetkarte einlesen (Block 1)			1
Eingabe der Funktionsvorschrift f(x)		GTO	
		x^2	
		LRN	204 00
		(	205 00
		(	206 00
		RCL	207 00
		00	208 00
		x^2	209 00
		+	210 00
		1	211 00
		)	212 00
		1/x	213 00
		)	214 00
		INV	215 00
		SBR	215 00
		LRN	1
Programmbeginn		A	1
Eingabe von: a	0	R/S	0
b	1	R/S	1
N	3	R/S	
Anzeige von: $S_{0,1,2,3}$			.7853964459

Es ist $I = \arctan 1 = .7853981634$

Programm 5.3	Romberg-Integration

000	76	LBL	051	49	PRD	102	05	05	153	04	4
001	11	A	052	01	01	103	43	RCL	154	49	PRD
002	91	R/S	053	00	0	104	05	05	155	01	01
003	42	STO	054	42	STO	105	44	SUM	156	53	(
004	03	03	055	05	05	106	04	04	157	43	RCL
005	91	R/S	056	02	2	107	02	2	158	01	01
006	42	STO	057	45	Y^X	108	22	INV	159	65	×
007	01	01	058	53	(	109	49	PRD	160	73	RC*
008	91	R/S	059	43	RCL	110	04	04	161	04	04
009	42	STO	060	07	07	111	43	RCL	162	75	-
010	02	02	061	75	-	112	04	04	163	73	RC*
011	42	STO	062	43	RCL	113	72	ST*	164	03	03
012	07	07	063	09	09	114	08	08	165	54	)
013	42	STO	064	54	)	115	01	1	166	55	÷
014	09	09	065	95	=	116	44	SUM	167	53	(
015	01	1	066	52	EE	117	08	08	168	43	RCL
016	01	1	067	22	INV	118	97	DSZ	169	01	01
017	42	STO	068	52	EE	119	09	09	170	75	-
018	08	08	069	42	STO	120	12	B	171	01	1
019	43	RCL	070	06	06	121	43	RCL	172	54	)
020	03	03	071	76	LBL	122	02	02	173	95	=
021	71	SBR	072	35	1/X	123	42	STO	174	72	ST*
022	34	√X	073	53	(	124	05	05	175	03	03
023	85	+	074	02	2	125	01	1	176	01	1
024	43	RCL	075	65	×	126	42	STO	177	94	+/-
025	01	01	076	43	RCL	127	00	00	178	44	SUM
026	71	SBR	077	06	06	128	42	STO	179	03	03
027	34	√X	078	75	-	129	06	06	180	44	SUM
028	95	=	079	01	1	130	76	LBL	181	04	04
029	42	STO	080	54	)	131	42	STO	182	97	DSZ
030	04	04	081	65	×	132	01	1	183	06	06
031	42	STO	082	43	RCL	133	42	STO	184	43	RCL
032	10	10	083	01	01	134	01	01	185	01	1
033	43	RCL	084	85	+	135	01	1	186	44	SUM
034	03	03	085	43	RCL	136	00	0	187	00	00
035	22	INV	086	03	03	137	85	+	188	43	RCL
036	44	SUM	087	95	=	138	43	RCL	189	00	00
037	01	01	088	71	SBR	139	02	02	190	42	STO
038	43	RCL	089	34	√X	140	75	-	191	06	06
039	01	01	090	95	=	141	43	RCL	192	97	DSZ
040	55	÷	091	44	SUM	142	05	05	193	05	05
041	02	2	092	05	05	143	95	=	194	42	STO
042	95	=	093	97	DSZ	144	42	STO	195	43	RCL
043	49	PRD	094	06	06	145	03	03	196	10	10
044	04	04	095	35	1/X	146	85	+	197	91	R/S
045	49	PRD	096	02	2	147	01	1	198	76	LBL
046	10	10	097	65	×	148	95	=	199	34	√X
047	76	LBL	098	43	RCL	149	42	STO	200	42	STO
048	12	B	099	01	01	150	04	04	201	00	00
049	02	2	100	95	=	151	76	LBL	202	76	LBL
050	22	INV	101	49	PRD	152	43	RCL	203	33	X²

5.4 Das Eulersche Polygonzugverfahren

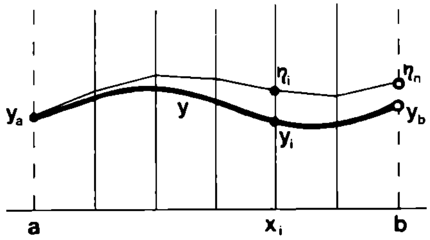
Gegeben sei eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung mit Anfangsbedingung

$$y' = f(x, y); \quad y(a) = y_a .$$

Gesucht ist $y(b) = y_b$. Die Grundidee des Polygonzugverfahrens besteht darin, das Intervall $[a, b]$ in n gleiche Teile zu teilen und die Lösungskurve $y(x)$ durch den Streckenzug mit den Ecken (x_i, η_i) zu ersetzen. Beim Eulerschen Polygonzugverfahren ist

$$x_{k+1} = x_k + \frac{b-a}{n}, \quad x_0 = a$$

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \frac{b-a}{n} f(x_k, \eta_k), \quad k = 0, \ldots, n-1.$$



Die Funktion f wird als Unterprogramm eingegeben. Dabei ist folgendes zu beachten:

1. Die Funktionsvorschrift $f(x, y)$ ist in Klammern einzuschließen.
2. Für x ist RCL 00, für y RCL 01 zu setzen.
3. Die Taste = darf nicht verwendet werden.
4. Die Eingabe der Funktionsvorschrift ist mit INV SBR abzuschließen.

Programminstruktionen

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
1	Magnetkarte einlesen (Block 1)			1
2	Eingabe der Funktionsvorschrift $f(x, y)$		GTO	
			x^2	
			LRN	048 00
			(	049 00
			⋮	⋮ ⋮
			)	XXX 00
			INV	XXX 00
			SBR	XXX 00
			LRN	1
3	Programmbeginn		A	1
4	Eingabe von a, b, y_a und n	a	R/S	a
		b	R/S	b
		y_a	R/S	y_a
		n	R/S	
5	Ergebnisanzeige			η_n

Registerinhalte

$R_{00}, \ldots, R_{04}$: Programmzeiger

Beispiel

Gegeben ist die Anfangswertaufgabe $y' = \frac{x}{y}$, $y(1) = 2$. In $n = 10$ Schritten soll eine Näherung für $y(1.5)$ gefunden werden.

Anmerkungen	Eingabe	Taste	Anzeige
Magnetkarte einlesen (Block 1)			1
Eingabe der Funktionsvorschrift $f(x, y)$		GTO	
		x^2	
		LRN	048 00
		(	049 00
		RCL	050 00
		00	051 00
		÷	052 00
		RCL	053 00
		01	054 00
		)	055 00
		INV	056 00
		SBR	056 00
		LRN	1
Programmbeginn		A	1
Eingabe von: a	1	R/S	1
b	1.5	R/S	1.5
y_a	2	R/S	2
n	10	R/S	
Anzeige von: η_n			2.287646401

Es ist $y = \sqrt{x^2 + 3}$ und $y(1.5) = 2.291287847$.

Programm 5.4	Das Eulersche Polygonzugverfahren

```
000  76 LBL    012  42 STO    024  42 STO    036  43 RCL
001  11  A     013  03  03    025  02  02    037  02  02
002  91 R/S    014  43 RCL    026  76 LBL    038  44 SUM
003  42 STO    015  04  04    027  12  B     039  00  00
004  00  00    016  75  -     028  71 SBR    040  97 DSZ
005  91 R/S    017  43 RCL    029  33 X²     041  03  03
006  42 STO    018  00  00    030  65  ×     042  12  B
007  04  04    019  95  =     031  43 RCL    043  43 RCL
008  91 R/S    020  55  ÷     032  02  02    044  01  01
009  42 STO    021  43 RCL    033  95  =     045  91 R/S
010  01  01    022  03  03    034  44 SUM    046  76 LBL
011  91 R/S    023  95  =     035  01  01    047  33 X²
```

5.5 Das Verfahren von Heun

Gegeben sei eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung mit Anfangsbedingung

$$y' = f(x, y), \quad y(a) = y_a .$$

Gesucht ist $y(b) = y_b$. Das Programm bestimmt eine Näherung für y_b in n Schritten (für $i = 0, \ldots, n-1$) nach den Formeln

$$\eta_{i+1} = \eta_i + F(x_i, \eta_i)$$

mit $F = \frac{1}{2}(f_0 + f_1)$

und $f_0 = h \cdot f(x_i, \eta_i)$, $f_1 = h \cdot f(x_i + h, \eta_i + h \cdot f_0)$

mit $h = \frac{b-a}{n}$ und $x_i = a + ih$. Die Funktion f wird als Unterprogramm eingegeben. Dabei ist folgendes zu beachten:

1. Die Funktionsvorschrift $f(x, y)$ ist in Klammern einzuschließen.
2. Für x ist RCL 00, für y RCL 01 zu setzen.
3. Die Taste = darf nicht verwendet werden.
4. Die Eingabe der Funktionsvorschrift ist mit INV SBR abzuschließen.

Programminstruktionen

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
1	Magnetkarte einlesen (Block 1)			1
2	Eingabe der Funktionsvorschrift $f(x, y)$		GTO	
			x^2	
			LRN	088 00
			(	089 00
			⋮	⋮ ⋮
			)	XXX 00
			INV	XXX 00
			SBR	XXX 00
			LRN	1
3	Programmbeginn		A	1
4	Eingabe von a, b, y_a und n	a	R/S	a
		b	R/S	b
		y_a	R/S	y_a
		n	R/S	
5	Ergebnisanzeige			η_n

Registerinhalte

$R_{00}, \ldots, R_{08}$: Programmzeiger

Beispiel

Gegeben ist das Anfangswertproblem $y' = \frac{x}{y}$, $y(1) = 2$. In $n = 10$ Schritten soll eine Näherung für $y(1.5)$ bestimmt werden.

Anmerkungen	Eingabe	Taste	Anzeige
Magnetkarte einlesen (Block 1)			1
Eingabe der Funktionsvorschrift $f(x, y)$		GTO	
		x^2	
		LRN	088 00
		(	089 00
		RCL	090 00
		00	091 00
		÷	092 00
		RCL	093 00
		01	094 00
		)	095 00
		INV	096 00
		SBR	096 00
		LRN	1
Programmbeginn		A	1
Eingabe von: a	1	R/S	1
b	1.5	R/S	1.5
y_a	2	R/S	2
n	10	R/S	
Anzeige von: η_{10}			2.291263323

Es ist $y = \sqrt{x^2 + 3}$ und $y(1.5) = 2.291287847$.

Programm 5.5	Das Verfahren von Heun

000	76	LBL	022	00	00	044	06	06	066	02	2
001	11	A	023	95	=	045	42	STO	067	85	+
002	91	R/S	024	55	÷	046	01	01	068	43	RCL
003	42	STO	025	43	RCL	047	43	RCL	069	05	05
004	00	00	026	03	03	048	04	04	070	95	=
005	91	R/S	027	95	=	049	44	SUM	071	42	STO
006	42	STO	028	42	STO	050	00	00	072	01	01
007	02	02	029	04	04	051	02	2	073	97	DSZ
008	91	R/S	030	76	LBL	052	42	STO	074	08	08
009	42	STO	031	12	B	053	08	08	075	13	C
010	01	01	032	71	SBR	054	76	LBL	076	43	RCL
011	42	STO	033	33	X²	055	13	C	077	01	01
012	05	05	034	42	STO	056	71	SBR	078	42	STO
013	42	STO	035	07	07	057	33	X²	079	05	05
014	06	06	036	65	×	058	85	+	080	97	DSZ
015	91	R/S	037	43	RCL	059	43	RCL	081	03	03
016	42	STO	038	04	04	060	07	07	082	12	B
017	03	03	039	85	+	061	95	=	083	43	RCL
018	43	RCL	040	43	RCL	062	65	×	084	01	01
019	02	02	041	05	05	063	43	RCL	085	91	R/S
020	75	-	042	95	=	064	04	04	086	76	LBL
021	43	RCL	043	42	STO	065	55	÷	087	33	X²

5.6 Das klassische Runge-Kutta-Verfahren

Gegeben sei eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung mit Anfangsbedingung

$$y' = f(x, y), \quad y(a) = y_a .$$

Gesucht ist $y(b) = y_b$. Das Programm liefert eine Näherung η_n für y_b nach den Formeln

$$\eta_{i+1} = \eta_i + F(x_i, \eta_i), \qquad i = 0, \ldots, n-1$$

mit $F = \frac{1}{6}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + f_3)$

und $f_0 = h \cdot f(x_i, \eta_i)$, $\quad f_1 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, \eta_i + \frac{f_0}{2}\right)$,

$$f_2 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, \eta_i + \frac{f_1}{2}\right), \quad f_3 = h \cdot f(x_i + h, \eta_i + f_2) .$$

Dabei ist $x_i = a + i \cdot h$, $h = \frac{b-a}{n}$ und n die Anzahl der Schritte. Die Funktion f wird als Unterprogramm eingegeben. Dabei ist folgendes zu beachten:

1. Die Funktionsvorschrift f(x, y) ist in Klammern einzuschließen.
2. Für x ist RCL 00, für y RCL 01 zu setzen.
3. Die Taste = darf nicht verwendet werden.
4. Die Eingabe der Funktionsvorschrift ist mit INV SBR abzuschließen.

Programminstruktionen

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
1	Magnetkarte einlesen (Block 1)			1
2	Eingabe der Funktionsvorschrift f(x, y)		GTO	
			x^2	
			LRN	135 00
			(	136 00
			⋮	⋮ ⋮
			)	XXX 00
			INV	XXX 00
			SBR	XXX 00
			LRN	1
3	Programmbeginn		A	1
4	Eingabe von a, b, y_a und n	a	R/S	a
		b	R/S	b
		y_a	R/S	y_a
		n	R/S	
5	Ergebnisanzeige			η_n

Registerinhalte

$R_{00}, \ldots, R_{07}$: Programmzeiger

Beispiel

Gegeben ist das Anfangswertproblem $y' = \frac{x}{y}$, $y(1) = 2$. Gesucht ist in $n = 10$ Schritten eine Näherung für $y(1.5)$.

Anmerkungen	Eingabe	Taste	Anzeige
Magnetkarte einlesen (Block 1)			1
Eingabe der Funktionsvorschrift f(x, y)		GTO	
		x^2	
		LRN	135 00
		(	136 00
		RCL	137 00
		00	138 00
		÷	139 00
		RCL	140 00
		01	141 00
		)	142 00
		INV	143 00
		SBR	143 00
		LRN	1

Anmerkungen		Eingabe	Taste	Anzeige
Programmbeginn			A	1
Eingabe von:	a	1	R/S	1
	b	1.5	R/S	1.5
	y_a	2	R/S	2
	n	10	R/S	
Anzeige von:	η_n			2.291287849

Es ist $y = \sqrt{x^2 + 3}$ und $y(1.5) = 2.291287847$.

Programm 5.6	Das klassische Runge-Kutta-Verfahren

```
000  76  LBL
001  11   A
002  91  R/S
003  42  STO
004  00   00
005  91  R/S
006  42  STO
007  02   02
008  91  R/S
009  42  STO
010  01   01
011  42  STO
012  05   05
013  42  STO
014  06   06
015  91  R/S
016  42  STO
017  03   03
018  43  RCL
019  02   02
020  75   -
021  43  RCL
022  00   00
023  95   =
024  55   ÷
025  43  RCL
026  03   03
027  95   =
028  42  STO
029  04   04
030  76  LBL
031  12   B
032  71  SBR
033  33  X²
034  65   ×
035  43  RCL
036  04   04
037  95   =
038  42  STO
039  07   07
040  55   ÷
041  06   6
042  95   =
043  44  SUM
044  06   06
045  43  RCL
046  04   04
047  55   ÷
048  02   2
049  95   =
050  44  SUM
051  00   00
052  43  RCL
053  07   07
054  55   ÷
055  02   2
056  85   +
057  43  RCL
058  05   05
059  95   =
060  42  STO
061  01   01
062  71  SBR
063  33  X²
064  65   ×
065  43  RCL
066  04   04
067  95   =
068  42  STO
069  07   07
070  55   ÷
071  03   3
072  95   =
073  44  SUM
074  06   06
075  43  RCL
076  07   07
077  55   ÷
078  02   2
079  85   +
080  43  RCL
081  05   05
082  95   =
083  42  STO
084  01   01
085  71  SBR
086  33  X²
087  65   ×
088  43  RCL
089  04   04
090  95   =
091  42  STO
092  07   07
093  55   ÷
094  03   3
095  95   =
096  44  SUM
097  06   06
098  43  RCL
099  04   04
100  55   ÷
101  02   2
102  95   =
103  44  SUM
104  00   00
105  43  RCL
106  07   07
107  85   +
108  43  RCL
109  05   05
110  95   =
111  42  STO
112  01   01
113  71  SBR
114  33  X²
115  65   ×
116  43  RCL
117  04   04
118  55   ÷
119  06   6
120  95   =
121  44  SUM
122  06   06
123  43  RCL
124  06   06
125  42  STO
126  05   05
127  97  DSZ
128  03   03
129  12   B
130  43  RCL
131  06   06
132  91  R/S
133  76  LBL
134  33  X²
```

5.7 Einschrittverfahren mit Schrittweitensteuerung

Um Schwankungen des lokalen Diskretisierungsfehlers beim Rechnen mit konstanter Schrittweite zu vermeiden, steuert das Programm bei der Lösung des Anfangswertproblems $y' = f(x, y)$, $y(a) = y_a$ die Schrittweite selbständig so, daß der lokale Diskretisierungsfehler annähernd konstant bleibt. Es benutzt dabei ein Paar von Runge-Kutta-Verfahren F_p, F_{p+1} der Ordnung p bzw. p+1 und bestimmt die jeweilige Schrittweite nach der Formel

$$h_{i+1} = 0.8 \cdot h_i \cdot \sqrt{\frac{\epsilon}{h_0 \, |F_{p+1} - F_p| + \epsilon \cdot 0.08^{p+1}}},$$

wobei $\epsilon > 0$ eine vorzugebende Toleranzschranke ist. Das Programm verwendet die beiden folgenden Verfahren F_2, F_3:

<u>p = 2:</u> $\quad \eta_{i+1} = \eta_i + F_2(x_i, \eta_i)$

mit $\quad F_2 = \frac{1}{2}(f_0 + f_1)$

und $\quad f_0 = h \cdot f(x_i, \eta_i), \; f_1 = h \cdot f(x_i + h, \eta_i + h \cdot f_0)$

<u>p = 3:</u> $\quad \eta_{i+1} = \eta_i + F_3(x_i, \eta_i)$

mit $\quad F_3 = \frac{1}{6}(f_0 + f_1 + 4f_2)$

und $\quad f_0 = h \cdot f(x_i, \eta_i), \; f_1 = h \cdot f(x_i + h, \eta_i + h \cdot f_0)$,

$$f_2 = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, \; \eta_i + \frac{h}{4}(f_0 + f_1)\right) .$$

Dabei ist $x_i = x_{i-1} + h_i$. Die Funktion f wird als Unterprogramm eingegeben. Dabei ist folgendes zu beachten:

1. Die Funktionsvorschrift f(x, y) ist in Klammern einzuschließen.
2. Für x ist <u>RCL</u> <u>00</u>, für y <u>RCL</u> <u>01</u> zu setzen.
3. Die Taste <u>=</u> darf nicht verwendet werden.
4. Die Eingabe der Funktionsvorschrift ist mit <u>INV</u> <u>SBR</u> abzuschließen.

Programminstruktionen

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
1	Magnetkarte einlesen (Block 1, 2)			2
2	Eingabe der Funktionsvorschrift f(x, y)		GTO	
			x^2	
			LRN	241 00
			(	242 00
			⋮	⋮ ⋮
			)	XXX 00
			INV	XXX 00
			SBR	XXX 00
			LRN	2
3	Programmbeginn		A	2
4	Eingabe von a, b, y_a, h_0, ϵ, p	a	R/S	a
		b	R/S	b
		y_a	R/S	y_a
		h_0	R/S	h_0
		ϵ	R/S	ϵ
		p	R/S	
5	Ergebnisanzeige			η_n

Registerinhalte

$R_{00}, \ldots, R_{09}$: Programmzeiger
R_{10}, R_{11}, R_{12}: f_0, f_1, f_2

Bemerkung

Soll ein anderes Paar von Runge-Kutta-Verfahren F_p, F_{p+1} verwendet werden, so sind diese als Unterprogramme $\underline{D}'$ und $\underline{D}$ zu programmieren (die im Programmausdruck angegebenen Unterprogramme sind dann selbstverständlich wegzulassen). Dabei ist zur Auswertung der Funktion f der jeweilige x-Wert in R_{00}, der jeweilige y-Wert in R_{01} zu speichern; h ist in R_{05}, x_i in R_{02} und η_i in R_{04} gespeichert. Die Funktionsvorschrift f(x, y) ist als Unterprogramm $\underline{x^2}$ zu programmieren.

Beispiel

Gegeben ist das Anfangswertproblem $y' = \frac{x}{y}$, $y(1) = 2$. Gesucht ist eine Näherung für $y(1.5)$ mit $h_0 = 0.1$ und $\epsilon = 10^{-5}$.

Anmerkungen		Eingabe	Taste	Anzeige
Magnetkarte einlesen (Block 1, 2)				2
Eingabe der Funktionsvorschrift f(x, y)			GTO	
			x^2	
			LRN	241 00
			(	242 00
			RCL	243 00
			00	244 00
			÷	245 00
			RCL	246 00
			01	247 00
			)	248 00
			INV	249 00
			SBR	249 00
			LRN	2
Programmbeginn			A	2
Eingabe von:	a	1	R/S	1
	b	1.5	R/S	1.5
	y_a	2	R/S	2
	h_0	0.1	R/S	0.1
	ϵ	0.00001	R/S	0.00001
	p	2	R/S	
Anzeige von:	η			2.291291758

Programm 5.7 Einschrittverfahren mit Schrittweitensteuerung

000	76	LBL	021	91	R/S	042	43	RCL	063	42	STO
001	11	A	022	85	+	043	03	03	064	08	08
002	91	R/S	023	01	1	044	75	-	065	75	-
003	42	STO	024	95	=	045	43	RCL	066	71	SBR
004	00	00	025	42	STO	046	02	02	067	19	D'
005	42	STO	026	07	07	047	95	=	068	95	=
006	02	02	027	29	CP	048	42	STO	069	50	I×I
007	91	R/S	028	76	LBL	049	05	05	070	65	×
008	42	STO	029	22	INV	050	76	LBL	071	43	RCL
009	03	03	030	43	RCL	051	23	LNX	072	05	05
010	91	R/S	031	02	02	052	43	RCL	073	95	=
011	42	STO	032	85	+	053	05	05	074	85	+
012	01	01	033	43	RCL	054	67	EQ	075	93	.
013	42	STO	034	05	05	055	44	SUM	076	00	0
014	04	04	035	75	-	056	22	INV	077	08	8
015	91	R/S	036	43	RCL	057	77	GE	078	45	Y×
016	42	STO	037	03	03	058	44	SUM	079	43	RCL
017	05	05	038	95	=	059	76	LBL	080	07	07
018	91	R/S	039	22	INV	060	24	CE	081	65	×
019	42	STO	040	77	GE	061	71	SBR	082	43	RCL
020	06	06	041	23	LNX	062	14	D	083	06	06

```
084  95  =
085  35  1/X
086  65  ×
087  43  RCL
088  06  06
089  95  =
090  45  Y^X
091  53  (
092  43  RCL
093  07  07
094  35  1/X
095  54  )
096  95  =
097  65  ×
098  93  .
099  08  8
100  65  ×
101  43  RCL
102  05  05
103  95  =
104  42  STO
105  09  09
106  75  -
107  43  RCL
108  05  05
109  95  =
110  77  GE
111  25  CLR
112  43  RCL
113  09  09
114  42  STO
115  05  05
116  61  GTO
117  24  CE
118  76  LBL
119  25  CLR
120  43  RCL
121  02  02
122  85  +
123  43  RCL
124  05  05
125  95  =
126  42  STO
127  00  00
128  42  STO
129  02  02
130  43  RCL
131  04  04
132  85  +
133  43  RCL
134  05  05
135  65  ×
136  43  RCL
137  08  08
138  95  =
139  42  STO
140  01  01
141  42  STO
142  04  04
143  43  RCL
144  09  09
145  42  STO
146  05  05
147  61  GTO
148  22  INV
149  76  LBL
150  44  SUM
151  43  RCL
152  04  04
153  91  R/S
154  76  LBL
155  14  D
156  53  (
157  43  RCL
158  02  02
159  42  STO
160  00  00
161  43  RCL
162  04  04
163  42  STO
164  01  01
165  53  (
166  71  SBR
167  33  X²
168  42  STO
169  10  10
170  65  ×
171  43  RCL
172  05  05
173  44  SUM
174  00  00
175  54  )
176  44  SUM
177  01  01
178  53  (
179  53  (
180  71  SBR
181  33  X²
182  42  STO
183  11  11
184  85  +
185  43  RCL
186  10  10
187  54  )
188  55  ÷
189  04  4
190  65  ×
191  43  RCL
192  05  05
193  85  +
194  43  RCL
195  04  04
196  54  )
197  42  STO
198  01  01
199  53  (
200  43  RCL
201  05  05
202  55  ÷
203  02  2
204  54  )
205  22  INV
206  44  SUM
207  00  00
208  53  (
209  71  SBR
210  33  X²
211  65  ×
212  04  4
213  85  +
214  43  RCL
215  11  11
216  85  +
217  43  RCL
218  10  10
219  54  )
220  55  ÷
221  06  6
222  54  )
223  54  )
224  92  RTN
225  76  LBL
226  19  D'
227  53  (
228  53  (
229  43  RCL
230  10  10
231  85  +
232  43  RCL
233  11  11
234  54  )
235  55  ÷
236  02  2
237  54  )
238  92  RTN
239  76  LBL
240  33  X²
```

5.8 Die Mittelpunktsregel

Die Mittelpunktsregel ist ein Mehrschrittverfahren zur Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = f(x, y)\ ,$$

bei dem vor Beginn der Rechnung zwei Startwerte $y(x_0) = y_0$ und $y(x_1) = y_1$ bekannt sein müssen. Eine Näherung η für das gesuchte $y(b) = y_b$ bestimmt sich dann nach den Formeln

$$\eta_{i+1} = 2\,h \cdot f\,(x_{i+1}, \eta_{i+1}) + \eta_i\ .$$

Dabei ist $x_i = a + i\,h$. Die Länge des Intervalls $[a, b]$ muß ein ganzzahliges Vielfaches der Schrittweite $h = x_1 - x_0$ sein, also

$$b - a \overset{!}{=} n \cdot h \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Die Funktion f wird als Unterprogramm eingegeben. Dabei ist folgendes zu beachten:

1. Die Funktionsvorschrift $f(x, y)$ ist in Klammern einzuschließen.
2. Für x ist RCL 00, für y RCL 01 zu setzen.
3. Die Taste = darf nicht verwendet werden.
4. Die Eingabe der Funktionsvorschrift ist mit INV SBR abzuschließen.

Programminstruktionen

	Verfahren	Eingabe	Taste	Anzeige
1	Magnetkarte einlesen (Block 1)			1
2	Eingabe der Funktionsvorschrift $f(x, y)$		GTO	
			x^2	
			LRN	063 00
			(	064 00
			⋮	⋮ ⋮
			)	XXX 00
			INV	XXX 00
			SBR	XXX 00
			LRN	1
3	Programmbeginn		A	1
4	Eingabe von a, b, y_0, y_1, h	a	R/S	a
		b	R/S	b
		y_0	R/S	y_0
		y_1	R/S	y_1
		h	R/S	
5	Ergebnisanzeige			η

Registerinhalte

$R_{00}, \ldots, R_{05}$: Programmzeiger

Beispiel

Gegeben ist die Differentialgleichung $y' = \frac{x}{y}$ mit den Startwerten $y(1) = 2$ und $y(1.05) = 2.025$. Gesucht ist eine Näherung für $y(1.5)$; es ist $h = 1.05 - 1 = 0.05$.

Anmerkungen		Eingabe	Taste	Anzeige
Magnetkarte einlesen (Block 1)				1
Eingabe der Funktionsvorschrift f(x, y)			GTO	
			x^2	
			LRN	063 00
			(	064 00
			RCL	065 00
			00	066 00
			÷	067 00
			RCL	068 00
			01	069 00
			)	070 00
			INV	071 00
			SBR	071 00
			LRN	1
Programmbeginn			A	1
Eingabe von:	a	1	R/S	1
	b	1.5	R/S	1.5
	y_0	2	R/S	2
	y_1	2.025	R/S	2.025
	h	0.05	R/S	
Anzeige von:	η			2.291400512

Es ist $y = \sqrt{x^2 + 3}$ und $y(1.5) = 2.291287847$.

Programm 5.8	**Die Mittelpunktsregel**

```
000  76 LBL
001  11  A
002  91 R/S
003  42 STO
004  00  00
005  91 R/S
006  42 STO
007  02  02
008  91 R/S
009  42 STO
010  03  03
011  91 R/S
012  42 STO
013  01  01
014  91 R/S
015  42 STO
016  04  04
017  53  (
018  43 RCL
019  02  02
020  75  -
021  43 RCL
022  00  00
023  54  )
024  55  ÷
025  43 RCL
026  04  04
027  95  =
028  42 STO
029  05  05
030  01  1
031  22 INV
032  44 SUM
033  05  05
034  76 LBL
035  12  B
036  43 RCL
037  04  04
038  44 SUM
039  00  00
040  71 SBR
041  33 X²
042  65  ×
043  02  2
044  65  ×
045  43 RCL
046  04  04
047  85  +
048  43 RCL
049  03  03
050  95  =
051  48 EXC
052  01  01
053  42 STO
054  03  03
055  97 DSZ
056  05  05
057  12  B
058  43 RCL
059  01  01
060  91 R/S
061  76 LBL
062  33 X²
```

Literatur

Böhm, W. / Gose, G.: Einführung in die Methoden der numerischen Mathematik, Vieweg (1977)

Gloistehn, H.-H.: Programmieren von Taschenrechnern 3, Lehr- und Übungsbuch für den TI-58 und TI-59, Vieweg (1978)

Jordan-Engeln, G. / Reutter, F.: Numerische Mathematik für Ingenieure, BI-Taschenbuch (1973)

Jordan-Engeln, G. / Reutter, F.: Formelsammlung zur numerischen Mathematik mit FORTRAN IV-Programmen, BI-Taschenbuch (1976)

Späth, H.: Spline Algorithmen zur Konstruktion glatter Kurven und Flächen, Oldenbourg (1973)

Texas Instruments: Individuelles programmieren, Programmierbare TI-58/59, Bedienungshandbuch

Verzeichnis der behandelten Probleme

Info-Gutschein

Bitte informieren Sie mich (uns) ständig über ihre Neuerscheinungen auf dem Gebiet:

☐ Taschenrechner ☐ Mikrocomputer

Ich (wir) besitze(n) folgendes Gerät:

TR: ____________________

μC: ____________________

Hauptanwendungsgebiete des TR bzw. μC:

____

Diese Karte entnahm(en) ich (wir) dem Buch:
Kahmann, Anwendung programmierbarer TR, Bd. 5

Meine (unsere) Buchhandlung:

____

____

Gleichzeitig bestelle(n) ich (wir) folgende Bücher:

Anzahl	Autor und Titel	Preis
	Schumny, TR + μC-Jahrbuch 1981	ca. 22,80
	Böhm/Gose, Numerische Mathematik	19,80

Anschrift: ____________________

____

____

Beruf/Branche

Datum Unterschrift

Lieber Leser!

Wenn Sie Interesse haben, aktiv an der Weiterentwicklung unseres Literaturprogramms zum Bereich TR + μC mitzuarbeiten, z.B. durch Veröffentlichung ausgetesteter Programme zu bestimmten Anwendungsgebieten, dann schreiben Sie uns.

Wir freuen uns über Ihre Nachricht und werden uns umgehend mit Ihnen in Verbindung setzen.

Mit freundlichem Gruß
Lektorat Fachbuch
gez. Niclas

Bitte
mit
50 Pf.
freimachen

Antwort

Friedr. Vieweg & Sohn
Verlagsgesellschaft mbH

Postfach 5829

D-6200 Wiesbaden 1

Anwendung programmierbarer Taschenrechner

Diese Reihe bietet den Benutzern programmierbarer Taschenrechner eine reichhaltige Palette von Aufgabenstellungen aus den Anwendungsgebieten der Natur- und Wirtschaftswissenschaften an, für die Programme zur numerischen Lösung entwickelt werden.

Jeder Band behandelt ein in sich abgeschlossenes Themengebiet: Nach einer kurzen Einführung in die Theorie der jeweiligen Problemstellung wird der Lösungsalgorithmus entwickelt, das Programm dargestellt und kommentiert.

Neben der direkten Nutzung der hier veröffentlichten Programme unterstützt diese Reihe den Leser wirkungsvoll bei der Ausarbeitung eigener Programmvarianten.

Band 5: Numerische Mathematik
Programme für den TI 59

von **Jürgen Kahmann**

Band 5 enthält 44 Programme zur numerischen Mathematik: Matrizen / Lineare Gleichungen und Ungleichungen / Iteration / Interpolation und diskrete Approximation / Numerische Differentiation und Integration.

Jürgen Kahmann ist Mitarbeiter am Institut für Angewandte Mathematik der Technischen Universität Braunschweig.

ISBN 3-528-04171-4